

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Económicas
Doctorado en Ciencias Económicas

Teoría de la Decisión, Acción Colectiva y Estabilidad

Presentado por
Pedro Nel Páez Pérez

Bogotá D.C., Mayo de 2009

[1]

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Económicas
Doctorado en Ciencias Económicas

Teoría de la Decisión, Acción Colectiva y Estabilidad

Pedro Nel Páez Pérez

**TRABAJO PRESENTADO COMO REQUISITO
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
Doctor en Ciencias Económicas**

Directores

Jorge Iván González, PhD

Universidad Nacional de Colombia

Luis Fernando Medina, PhD

University of Virginia

Bogotá D.C., Diciembre de 2008

Tabla de Contenido

1. Introducción.....	7
2. El Procedimiento Lineal de Rastreo (PLR).....	10
2.1. Notación básica.....	10
2.2. El Concepto de equilibrio.....	12
2.3. El Concepto de Rastreo (PR).....	13
2.4. Aplicaciones.....	18
2.4.1. El dilema del prisionero.....	19
2.4.2. El juego de las monedas (Matching pennies).....	22
2.4.3. La batalla de los sexos.....	28
3. El Equilibrio de respuesta cuantal.....	33
3.1. La especificación logit.....	36
3.2. Aplicaciones.....	37
3.2.1. El dilema del prisionero.....	37
3.2.2. El juego de las monedas.....	38
3.2.3. La batalla de los sexos.....	41
4. El análisis de estabilidad.....	45
4.1. La dinámica del Procedimiento Lineal de Rastreo.....	45
4.2. La dinámica del Equilibrio de Respuesta Cuantal.....	55
5. Conclusiones.....	63
6. Referencias.....	66

Listado de figuras, gráficos y tablas

Figuras

Figura 3.1. Patrón de flechas utilizadas en el PLR.....	17
Figura 3.2. Equilibrio de Nash en estrategias puras.....	18
Figura 3.3. Matriz de pagos de un juego 2×2	18
Figura 3.4. Matriz de pagos del dilema del prisionero.....	19
Figura 3.5. Matriz de pagos para el juego Γ^0	21
Figura 3.6. Matriz de pagos y patron de flechas en el juego de las monedas.....	22
Figura 3.7. Matriz de pagos Γ^0 en el juego de las monedas.....	23
Figura 3.8. Juego auxiliar Γ^t en el juego de las monedas.....	26
Figura 3.9. Patrones de flechas para el juego de las monedas.....	26
Figura 3.10. Matriz de pagos y patrón de flechas en el juego batalla de los sexos.....	28
Figura 3.11. Matriz Γ^0 en el juego batalla de los sexos.....	30
Figura 3.12. Matriz Γ^t en la batalla de los sexos.....	30
Figura 3.13 Patrones de flechas para el juego batalla de los sexos.....	30
Figura 5.1. Matriz genérica Γ^0 en el dilema del prisionero.....	47
Figura 5.2. Diagrama de estabilidad del dilema del prisionero.....	47
Figura 5.3. Diagrama de estabilidad y equilibrios de rastreo para el juego de las monedas.....	49
Figura 5.4. Diagrama de estabilidad y equilibrios de rastreo para el juego batalla de los sexos.....	50

Gráficos

Gráfico 3.1. Representación gráfica $X(G, p)$ para el Procedimiento Lineal de Rastreo.....	16
--	----

Gráfico 3.2. Rastreo lineal para el juego de los prisioneros.....	22
Gráfico 3.3. Rastreo lineal para el juego de las monedas.....	25
Gráfico 3.4. Rastreo lineal para el juego batalla de los sexos.....	32
Gráfico 4.1. Mejores respuestas cuantales en el dilema del prisionero.....	38
Gráfico 4.2. Mejores respuestas cuantales en el juego de las monedas.....	39
Gráfico 4.3. Mejores respuestas cuantales en la batalla de los sexos.....	42
Gráfico 5.1. Determinante de J_E en el dilema del prisionero.....	54
Gráfico 5.2. Determinante de J_E en el juego de las monedas.....	56
Gráfico 5.3. Determinante de J_E en el equilibrio (0, 0) de la batalla de los sexos.....	59
Gráfico 5.4. Determinante de J_E en el equilibrio (2/3, 1/3) de la batalla de los sexos.....	62

Tablas

Tabla 5.1. Configuración de los equilibrios en el juego de las monedas.....	57
Tabla 5.2. Configuración del equilibrio (2/3, 1/3) en el juego batalla de los sexos.....	61
Tabla 6.1. Caracterización de equilibrios para el PLR y el ERC.....	63

Teoría de la Decisión, Acción Colectiva y Estabilidad

1. Introducción

La teoría de juegos estudia el comportamiento estratégico de los jugadores, la cooperación y el conflicto en situaciones de interdependencia mutua. Un juego puede definirse como un arreglo formal para estudiar dicha interacción e incluye las preferencias, la información y las acciones estratégicas disponibles para los participantes.

Coexisten dos clases de juegos. Los juegos cooperativos y no cooperativos. Los primeros representan escenarios en las que es posible formar coaliciones a partir de la cooperación entre los individuos, en un marco de comunicación libre y acuerdos vinculantes, (de carácter obligatorio) como lo presentan Harsanyi (1975, 1976) y Harsanyi y Selten (1988). En contraste, la teoría de juegos no cooperativos se refiere al análisis de situaciones estratégicas en las que cada agente actúa por su propio interés. No hay lugar para coaliciones, pues se asume que cada jugador actúa independientemente, sin colaboración o comunicación con los otros jugadores (Nash, 1950, 1951).

La solución de un juego se relaciona estrechamente con el concepto de equilibrio y su racionalidad reside en el hecho de que la teoría, que sugiere cómo jugar, también debe proporcionar un punto de equilibrio para cada juego (Aumann, 1988, pg. xii) si bien hay casos en los que pueda haber más de un equilibrio. Por esa razón, cobran relevancia tanto la selección de un equilibrio como la unicidad del mismo (Osborne y Rubinstein, 1994, pág. 19 ss.).

Cuando un juego tiene más de un equilibrio, su utilidad se mengua y por lo tanto, debe hallarse un criterio que seleccione entre soluciones que compiten entre sí. El comportamiento adaptativo o “aprendizaje” es un mecanismo para la selección de un equilibrio en los juegos. Al respecto se ha argumentado (Fogale, et. al. 2006) que el criterio plausible para la selección es aquel que pueda aprenderse por los jugadores que, utilizando alguna regla adaptativa en comportamiento sea a la vez localmente estable bajo las interacciones dinámicas generadas por esa regla.

Este trabajo presenta dos métodos de selección de equilibrios; el primero de ellos llamado “*Procedimiento Lineal de Rastreo*” (PLR) (parte 2) propuesto por Harsanyi y Selten (1988, op. cit.). Consiste en una construcción matemática que ajusta creencias arbitrarias previas en creencias de equilibrio (Herings, Elzen van deem, 2002). El segundo método se denomina “*Equilibrio de Respuesta Cuantal*” (ERC) (parte 3) planteado por McKelvey y Palfrey (1995, 1996). Este es un concepto de solución que provee una noción de equilibrio con racionalidad acotada. Asume que los jugadores cometen errores cuando hacen una elección y la probabilidad de elegir una estrategia particular se relaciona positivamente con el pago obtenido por utilizarla. En el ERC el equilibrio surge de la realización de las creencias, mientras que los pagos se calculan con base en las creencias sobre las distribuciones de probabilidad sobre las estrategias de los demás jugadores. En equilibrio, las creencias de un jugador son correctas.

En la literatura sobran los refinamientos teóricos que buscan seleccionar un equilibrio cuando en un juego hay varios de ellos. Por ejemplo, en situaciones en las que no puede hacerse una predicción clara sobre el resultado del juego, un “refinamiento” intenta definir algún equilibrio como el “más probable”, el “más racional”, o el “más robusto”. Si las predicciones derivadas de un juego son incompletas, el equilibrio sería un criterio débil para precisar un resultado. Por ese motivo el criterio (de equilibrio) puede “refinarse” para obtener predicciones más concretas como las expuestas por Hillas y Kohlberg (2002), Kohlberg (1990) y Kreps y Wilson (1982).¹

Después de la publicación de la *Teoría General de la Selección de Equilibrios en Juegos* de Harsanyi y Selten en 1988, muchos investigadores han continuado la investigación sobre la selección de equilibrios, como lo resaltan Goere y Holt (2000). El trabajo se ha manifestado en diferentes enfoques. Entre ellos, el denominado análisis tradicional del equilibrio, en el que se destacan justamente Harsanyi y Selten y las nociones de riesgo y dominancia de pagos.² Otras corrientes analizan el equilibrio para juegos con perturbaciones estocásticas y los modelos de aprendizaje racional extienden el análisis del equilibrio a juegos repetidos, a la dinámica determinística evolutiva, al análisis del equilibrio de largo plazo de la dinámica evolutiva estocástica y a los modelos de aprendizaje adaptativo.

¹ Estos temas también han sido trabajados, entre otros por van den Elzen (1990) y van den Elzen y Talman (1991, 1994, 1995 y 1996).

² Se considera que un equilibrio de Nash tiene dominancia de pagos si es Pareto-superior con respecto a los demás equilibrios en un juego. De otra parte, un equilibrio de Nash se considera que tiene dominancia de riesgo (risk dominance) si tiene la mayor cuenca de atracción (basin of attraction), lo que significa que entre más incertidumbre tenga cada jugador sobre las acciones de los otros jugadores, hay más probabilidad de que elija una estrategia con dominancia de riesgo.

Los análisis tradicionales del equilibrio y los modelos racionales de aprendizaje incorporan una visión deductiva del comportamiento con racionalidad perfecta y un alto grado de sofisticación a los jugadores. Los modelos de adaptación dinámica toman un punto de vista inductivo del comportamiento, con menos sofisticación pero con incertidumbre estratégica ilimitada.

Como inicialmente se afirmó, este trabajo se centra en el análisis del PLR y el ERC y las aplicaciones de estos procedimientos a unos juegos conocidos. También explora la aplicación de elementos de dinámica económica (parte 4) a estos juegos y su posible relación con situaciones sociales, especialmente de acción colectiva, entendida como la acción conjunta de grupos de personas que persiguen un propósito común, por intereses compartidos, afinidades o similitudes en las preferencias. Cabe advertir sin embargo, que la sola identificación de intereses no se traduce necesariamente en acciones que busquen el objetivo común, ya que frente al colectivo, persisten las preferencias estrictamente individuales, lo que implica una superposición de lógicas grupo-individuo, así como intenciones y cursos de acción.

El proceso por el cual el equilibrio de un juego sufre alteraciones, trae consigo efectos de generación o de redistribución de beneficios, lo que resalta el papel de la información como categoría de primer orden en el análisis de fenómenos sociales. En otras palabras, el grado de incorporación de información o de mejoras en la misma (como en los casos del PLR y ERC) permite resultados sociales cualitativamente distintos a los que se obtendrían si no hubiera un elemento de “aprendizaje”.

Es de indicar, sin embargo, que los juegos analizados no necesariamente agotan las combinaciones de preferencias de los jugadores o las condiciones inherentes a los pagos, y que por ello mismo, las conclusiones obtenidas no son generalizables a cualquier esquema de decisión representable en un juego no cooperativo de una lanzada (one shot game). Se han tomados tres ejemplos, los más conocidos y de estructura más sencilla en la literatura, en razón a que en ellos se combina la presencia o ausencia de los conceptos convencionales de solución. El dilema de los prisioneros presenta solución de estrategia pura y el juego de las monedas (matching pennies) solución de estrategia mixta; mientras que la batalla de los sexos tiene soluciones en estrategias puras y en estrategias mixtas.

En los casos del PLR y el ERC se ha seguido fielmente la notación utilizada por los autores y se ha tenido especial atención en la edición de los gráficos, tablas y figuras utilizadas.

2. El Procedimiento Lineal de Rastreo (PLR)

2.1. Notación básica

Esta sección se inicia considerando un juego $G = (\Phi, H)$ en forma normal no cooperativo con n jugadores, tal como lo presentaran Harsanyi y Selten (1988, op. cit. págs. 33 y 131). Consiste en un conjunto admisible³ de combinaciones de estrategias puras y una función de pagos H sobre Φ .

Por conveniencia, las estrategias puras del jugador i se expresan por $\phi_i^1, \dots, \phi_i^k, \dots, \phi_i^{K_i}$.⁴ El símbolo ϕ_i se utiliza como notación genérica para cualquier estrategia pura del jugador i ; $i, (i = 1, \dots, n)$ es el i -ésimo jugador.

$|S|$ = Número de elementos de un conjunto finito cualquiera S . De lo expuesto en el párrafo anterior puede afirmarse que $|\Phi_i| = K_i$ para $i = 1, \dots, n$, por lo que el número completo de combinaciones de estrategias puras ϕ será $|\Phi| = K = \prod_{i \in N} K_i$, y N es el conjunto de todos los jugadores. Por eso mismo se puede definir $|\Phi_{-i}| = K_{-i} = \frac{K}{K_i}$, $i = 1, \dots, n$ y se pueden hacer las definiciones siguientes:

Φ_i = Conjunto de estrategias puras del jugador i y se corrobora que $|\Phi_i| = K_i$.

Φ = Conjunto de todas las estrategias puras del juego.

Las estrategias mixtas se representan por q . Una estrategia q_i del jugador i es una distribución de probabilidades sobre el conjunto de estrategias puras de i , $q_i(\phi_i)$ que

³ El término “admisible” se refiere a que los conjuntos de jugadores y estrategias son finitos y no vacíos.

⁴ Algunas veces las estrategias puras se designan por K_i , como el número de estrategias puras del jugador i .

denota la probabilidad que se asigna a ϕ_i . Q_i es el conjunto de todas las estrategias mixtas q_i del jugador i .

Una combinación $q = (q_i)_N$ de estrategias mixtas contiene una estrategia mixta q_i para cada $i \in N$. El conjunto de todas las combinaciones de este tipo se denota por Q . Para $q = q_i$ y $\phi = (\phi_i)$ Harsanyi y Selten introducen la notación $q(\phi) = \prod_{i \in N} q_i(\phi)$ o en otras palabras, $q(\phi)$ es el producto de todos los $q_i(\phi), i \in N$.

La función de pagos H en un entorno de estrategias puras asigna un vector de valores de recompensa o utilidad a los jugadores según la combinación de estrategias $\phi(i)_N$. Su dominio es el conjunto ϕ y su rango el espacio \mathbb{R} . Al pasar al entorno de estrategias mixtas, la definición comprende las combinaciones de probabilidad q sobre el conjunto Φ , de modo que la función de pagos adquiere la forma $H(q) = \sum_{\phi \in \Phi} q(\phi) H(\phi)$.

Las combinaciones incompletas del tipo $q_{-i} = (q_i)_{N \setminus \{i\}}$ que contiene una estrategia mixta para cada jugador, con excepción de i , se denomina i -incompleta. Φ_{-i} denota el conjunto de todas las combinaciones de estrategias puras i -incompletas, mientras que Q_{-i} se utiliza para denotar al conjunto de todas las combinaciones mixtas i -incompletas.

Por tanto, una estrategia mixta puede ser descrita como un vector de probabilidades $q_i(q_{i1}, \dots, q_{iK_i})$ donde $q_{ik} (k = 1, \dots, K_i)$ es la probabilidad que la estrategia mixta asigna a la estrategia pura ϕ_i^k y $q_{ik} \geq 0$ para $k = 1, \dots, K_i$, donde $\sum_{k=1}^{K_i} q_{ik} = 1$. Por eso mismo puede definirse:

Q = Espacio de probabilidad a partir del cual se definen los vectores de estrategias mixtas.

Q_{-i} = Q reducido en la dimensión del i -ésimo jugador.

Q_i = espacio de probabilidad del jugador i .

q = es un elemento de Q que contiene los vectores de probabilidad $q_i, i = 1, \dots, n$.

q_{-i} = complemento de q_i respecto a q , es decir, el conjunto de estrategias mixtas de los $(n-1)$ distintos a i .

2.2. El concepto de equilibrio

El concepto de equilibrio de Nash (EN) se expresa en términos de mejores respuestas, de la siguiente forma:

Equilibrio en estrategias puras: para un juego en estrategias puras el EN es un perfil $q^* \in \Phi$ tal que cada jugador está utilizando una mejor respuesta a la elección de estrategias de sus oponentes. Formalmente se dice que q^* es un EN si $\forall i \in N$ $\phi \in BR_i(\phi_i^*)$, donde $BR_i(\phi_i^*)$ es el conjunto de mejores respuestas, definidas como las estrategias que cumplen la condición⁵

$$\forall i \in N, \forall \phi_i \in \Phi_i, u_i(\phi_i^*, \phi_{-i}^*) \geq u_i(\phi_i, \phi_{-i}^*)^6$$

donde la función u (utilidad von Neumann – Morgenstern) desempeña el mismo papel de la función H .

Un EN de un juego en forma estratégica en estrategias mixtas es un perfil de estrategias mixtas q^* tal que cada jugador utiliza una mejor respuesta a la elección de estrategias de los oponentes. Formalmente se dice que q^* es un EN si $\forall i \in N$, q_i es una mejor respuesta a q_{-i} o equivalentemente $\forall i \in N$, $\sup q_i^* \subset BR_i(q_{-i}^*)$. Alternativamente,

$$\forall i \in N, \forall q_i \in Q_i, u_i(q_i^*, q_{-i}^*) \geq u_i(q_i, q_{-i}^*).$$

⁵ BR: best response; mejor respuesta.

⁶ Se dice que una estrategia $\phi_i \in \Phi_i$ para el jugador i es una mejor respuesta de i al perfil i -incompleto ϕ_{-i} sí y sólo sí $\forall i \in \Phi_i, u_i(\phi_i^*, s_{-i}) \geq u_i(\phi_i, s_{-i})$, o equivalentemente $\phi_i \in \arg \max_{\phi_i \in \Phi_i} u_i(s_i, s_{-i})$.

2.3. El concepto del rastreo

Consiste en un procedimiento matemático para definir resultados racionales en juegos no cooperativos en el marco conceptual bayesiano. Se busca modelar un proceso de expectativas convergentes, llamado proceso de selección de resultados, en el que los jugadores racionales adoptan y esperan que cada uno de los otros jugadores adopte un punto particular de equilibrio $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ como el resultado de un juego cooperativo G .

Como lo señalaran Harsanyi y Selten (op.cit. pg. 137 y ss.) al inicio del proceso de selección de resultados los jugadores no pueden predecir las estrategias que utilizarán los otros jugadores, en consecuencia, cada uno de los j jugadores expresa sus expectativas sobre la elección de estrategias de un jugador $i \neq j$ en la forma de una distribución subjetiva de probabilidades, $p_i = (p_{i1}, \dots, p_{iK_i})$ sobre las estrategias puras de i , donde p_{ik} , ($k=1, \dots, K_i$) es la probabilidad subjetiva que el jugador j asigna a la posibilidad de que el jugador i utilice su k -ésima estrategia pura ϕ_i^* . Las distribuciones de probabilidad subjetivas p_i se denominan distribuciones de probabilidad previas o vector de creencias previas. (Ver Harsanyi y Selten, pg. 137).

Matemáticamente, cada vector de creencias previas p_i es una distribución de probabilidad p_i sobre $\Phi_i = \{\phi_i\}$ y por tanto tiene la naturaleza de una estrategia mixta para el jugador i .

Si se conocieran las expectativas mutuas de los n jugadores como se expresan por el vector de creencias previas p , la pregunta que se plantea es cómo predecir la combinación de estrategias $q = (q_1, \dots, q_n)$ que utilizarán los participantes en el juego. A eso se denomina el problema de predicción, porque aunque se conozcan las creencias previas, no se sabe con certeza la combinación real que utilizarán los jugadores. Se supone que el procedimiento de rastreo ofrece una solución al problema de predicción.

Para Harsanyi y Selten, (op. cit.) el enfoque bayesiano ingenuo surge al dar la respuesta más simple al problema de predicción. Dados p y p_{-i} , cada jugador i

simplemente elige una estrategia q_i^o que es la mejor respuesta a p_{-i} ; es decir, elige $q_i = q_i^o$ que maximiza su pago esperado $H_i = H_i(q_i, p_{-i})$ y el resultado del juego será (q_1^o, \dots, q_n^o) de esas estrategias de mejor respuesta q_i^o para los otros jugadores. Es decir, el resultado se define como un vector de mejor respuesta q^o al vector previo p . Se denomina enfoque bayesiano ingenuo. ¿Por qué es un enfoque ingenuo? Porque es la primera respuesta, la primera reacción, pero no es un punto de equilibrio del juego y no sería el resultado elegido por un jugador racional. La información inicial de los jugadores sobre el comportamiento de los otros jugadores se expresa por el vector previo $p = (p_1, \dots, p_n)$ y expresa una información de primer orden sobre la conducta probable de cada jugador. Cualquier información que los jugadores puedan tener sobre las reacciones de cada uno de los demás a la información de primer orden se denomina información de segundo orden. Si las reacciones de los jugadores fueran contestar a p con $q^o = (q_1^o, \dots, q_n^o)$ ésta debería ser una información de segundo orden pero no lo es; tampoco es un punto de equilibrio aun cuando el enfoque bayesiano ingenuo supone que sí lo es.

La predicción es consistente con la información de primer orden que le atribuye al enfoque bayesiano ingenuo, q_i^o es mejor respuesta a p_{-i} , pero la predicción es inconsistente con la información de segundo orden que se supone que tiene, y q_i^o no es mejor respuesta a q_{-i}^o . Sin embargo, el enfoque si puede utilizarse como un punto de partida. El procedimiento de rastreo siempre se inicia con la combinación q^o que representa un vector de mejor respuesta a p y que se asume expresa la información de primer orden de los jugadores. El procedimiento de rastreo gradualmente retroalimenta esta información de segundo orden en el sistema más y más, hasta que al final desaparece toda la discrepancia entre la información de primer y segundo orden.

Al comienzo del procedimiento de rastreo las expectativas de los jugadores (información de primer orden) sobre el comportamiento de los demás jugadores está dado por el vector previo p , y sus planes estratégicos tentativos (información de segundo orden) están dadas por q^o . En tanto que el procedimiento de rastreo progresa, p y q están sometidos a una transformación sistemática y continua hasta que ambos convergen a un punto de equilibrio específico $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ del juego. El procedimiento lineal de rastreo (PLR) se basa en una familia de juegos auxiliares Γ^t , $0 \leq t \leq 1$, donde cada

jugador i , ($i=1, \dots, n$) tiene un conjunto de estrategias $Q_i = \{q_i\}$ pero su función de pagos H_i^t en Γ^t será $H_i^t(q_i, q_{-i}) = tH_i(q_i, q_{-i}) + (1-t)(H_i(q_i, p_{-i}))$ donde H_i es la función de pago de i en el juego original G . Entonces

$$H_i^1(q_i, q_{-i}) = H_i(q_i, q_{-i}) \Rightarrow \Gamma^1 = G.$$

De otra parte,

$$H_i^0(q_i, q_{-i}) = H_i(q_i, p_{-i}).$$

En conclusión $\Gamma^0 = (q_i, q_{-i}) = (q_i, p_{-i})$; $\Gamma^1 = H_i^1(q_i, q_{-i}) = H_i(q_i, q_{-i})$ y

$$\Gamma^t = H_i^t(q_i, q_{-i}) = tH_i(q_i, q_{-i}) + (1-t)(H_i(q_i, p_{-i}))$$

Posterior al trabajo de Harsanyi y Selten varios autores se han encargado de ampliar el tema. Para van den Elzen (1996, op. cit) el PLR de Harsanyi y Selten es un procedimiento para seleccionar un equilibrio en juegos cooperativos en general, si bien considera difícil su aplicación por algunos aspectos no lineales que lo caracterizan. Propone una versión adaptada del algoritmo desarrollado por van den Elzen y Talman como método alternativo para calcular el PLR aplicado a juegos polimatrixiales. Herings (2000) presenta un algoritmo para calcular el equilibrio estacionario en juegos estocásticos y muestran que es convergente para casi todo tipo de juegos. Herings y Peeters en un documento relativamente reciente (2006) muestran una revisión completa del uso de algoritmos (homotopías) en la teoría de juegos y presentan las técnicas más relevantes subyacentes a los algoritmos, como los de Lemke-Howson, van den Elzen-Talman, Herings-Peeters y McKelvey-Palfrey para calcular equilibrios de Nash en juegos generales con n -personas.⁷

El desarrollo del rastreo se hace sobre un gráfico X , es decir, una función de “uno a varios”. Los argumentos de X están dados por el juego original G y el vector de creencias previas p . La correspondencia se da entre t y el equilibrio E^t . Hay una secuencia de equilibrios entre los extremos del intervalo. La presencia de la variable t hace que el conjunto de equilibrios consista en una secuencia q_i óptima (mejores respuestas) a la distribución de probabilidad $\varphi(i, t, q) = t[q_{-i}] + (1-t)[p_{-i}]$ que indica la

⁷ Ver también Goeree, Holt y Palfrey (2002, 2003, 2005, y 2008), Goeree y Holt (2005).

combinación lineal que se aplica sobre el conjunto de combinaciones de estrategias puras ϕ_{-i} .

El procedimiento de rastreo, como ya se anotó, consiste en determinar una senda única de equilibrios entre los juegos Γ^0 y $\Gamma^1 = G$, para enlazar las estrategias que surgen del vector previo p con las estrategias que conllevan al equilibrio q^* del juego G .

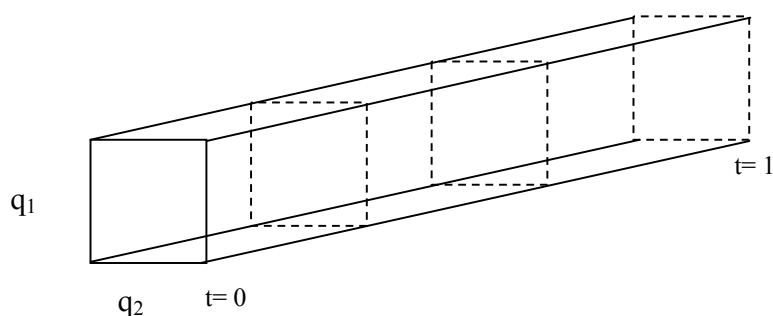


Gráfico 2.1. Representación gráfica $X(G, p)$ para el Procedimiento Lineal de Rastreo

Para el caso en que el espacio de estrategias pueda representarse en dos dimensiones, la gráfica $X(G, p)$ es un prisma de base rectangular en el que cada uno de los infinitos juegos es una traslación de la base sobre el eje t , como se aprecia en el gráfico 3.1. Harsanyi y Selten (op. cit) adoptan una convención distinta a la cartesiana, dado que si bien q_1 aumenta de valor de abajo hacia arriba, como una ordenada cualquiera, q_2 aumenta de valor de derecha a izquierda. Esto hace que la combinación de estrategias $(0,0)$ corresponda a la esquina inferior derecha del rectángulo, y la combinación de estrategias $(1,1)$ corresponda a la esquina superior izquierda.

La nomenclatura de los puntos del gráfico es $x = (t, q)$ donde q es la parte de estrategia y t es el eje coordenado entre 0 y 1. La senda que comunica a X^0 con X^1 se denomina senda viable o senda posible (feasible path). $X^0 = (0, q^0)$ donde q^0 es un

equilibrio del juego Γ^o y $X^1 = (1, q^*)$ es un equilibrio de G , cuya consecución a partir del vector previo p es racional.⁸

Dado que en el trayecto $t=0$ hasta $t=1$ puede haber (no necesariamente) modificaciones en la posición y naturaleza del (los) equilibrio (s) de un juego, es necesario conocer específicamente cuáles son los valores de t donde se presentan esos cambios. Para tal fin, Harsanyi y Selten (op. cit.) utilizan unos patrones de flechas como los presentados en la figura 3.1.

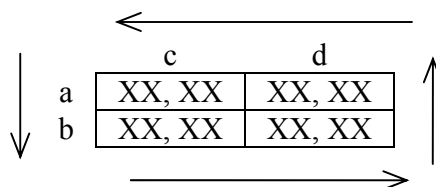


Figura 2.1. Patrones de flechas utilizadas en el PLR

La flecha en el costado izquierdo significa que cuando el jugador columna elige la estrategia (c), el jugador fila prefiere la estrategia (b) a la estrategia (a).

La flecha en el costado derecho significa que cuando el jugador columna elige la estrategia (d), el jugador fila prefiere la estrategia (a) a la estrategia (b).

La flecha en la parte superior significa que cuando el jugador fila elige la estrategia (a), el jugador columna prefiere la estrategia (c) a la estrategia (d).

La flecha en la parte inferior significa que cuando el jugador fila elige la estrategia (b), el jugador columna prefiere la estrategia (d) a la estrategia (c).

Cuando las dos flechas verticales o las dos flechas horizontales coinciden en su sentido, para el respectivo jugador existe una estrategia dominante. Así mismo, cuando

⁸ En el sentido de que los jugadores son racionales.

dos cabezas de flecha coinciden, en la celda correspondiente existe un equilibrio de Nash en estrategias puras. En la figura 3.2 hay un equilibrio en la combinación de estrategias (b, d) . Para el jugador fila, la estrategia (b) domina estrictamente a (a) , mientras que para el jugador columna no hay ninguna estrategia ni dominante ni dominada.

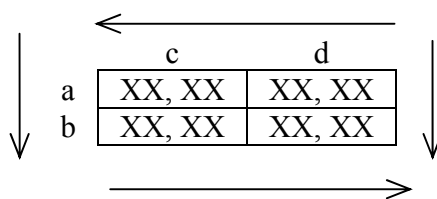


Figura 2.2. Equilibrio de Nash en estrategias puras

En aquellos valores de t para los cuales el equilibrio se desplaza, la convención consiste en una flecha de doble sentido. El mecanismo algebraico para la determinación de estos valores, y en general el desarrollo aplicado del procedimiento, se presentan en la sección siguiente.

2.4. Aplicaciones

En esta sección se expone el desarrollo del rastreo lineal sobre los tres juegos más ilustrativos y conocidos en la literatura de la teoría de juegos: el dilema del prisionero, el juego de las monedas y la batalla de los sexos. Todos corresponden a esquemas de tipo 2×2 , esto es, juegos de dos jugadores y dos estrategias para cada jugador. La representación general matricial de un juego 2×2 se muestra en la figura adjunta.

$$\begin{array}{l}
 E_1^1 : (p) \\
 E_2^1 : (1-p)
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 E_1^2 : (q) & E_2^2 : (1-q) \\
 \hline
 a_{11}, b_{11} & a_{12}, b_{12} \\
 \hline
 a_{21}, b_{21} & a_{22}, b_{22} \\
 \hline
 \end{array}$$

Figura 2.3. Matriz de pagos de un juego 2×2

La notación de las estrategias es E_j^i , donde el superíndice i identifica al jugador y el subíndice j denota sus estrategias. Los pagos de los jugadores fila y columna aparecen dentro de las casillas de la matriz bajo la notación a_{mn} y b_{mn} respectivamente, donde m es la estrategia del jugador fila y n la estrategia del jugador columna. En las elecciones que requieren estrategias mixtas, al jugador fila le son asignadas las probabilidades p y $(1-p)$, y al jugador columna le son asignadas las probabilidades q y $(1-q)$.

2.4.1. El dilema del prisionero

El juego consiste en que los dos jugadores (prisioneros) se encuentran detenidos e incomunicados y se les conmina a confesar un delito que han cometido. Cada cual dispone de dos estrategias puras, $C = \text{confesar}$ y $NC = \text{no confesar}$. Los pagos están expresados en números negativos porque representan los años de condena, o en otras palabras, la des-utilidad recibida por los prisioneros. La matriz de pagos se muestra en la figura 3.4.

		C	NC	
p		-3, -3	0, -6	C
1-p		-6, 0	-1, -1	NC

Figura 2.4. Matriz de pagos del dilema del prisionero

Para el equilibrio en estrategias puras el problema se configura de manera que los prisioneros son inducidos a confesar, ya que ante cualquier elección de la contraparte, es menor la condena por confesar que por no confesar. Así se alcanza un único equilibrio en la combinación (C, C) .

Este juego no tiene equilibrios en estrategias mixtas. Tal conclusión surge al considerar que al retomar la matriz de pagos, la definición de equilibrios en estrategias mixtas implica el cumplimiento de las expresiones

$$a_{11}q + a_{12}(1-q) = a_{21}q + a_{22}(1-q)$$

$$b_{11}p + b_{12}(1-p) = b_{21}p + b_{22}(1-p)$$

de donde

$$q^* = \frac{(a_{22} - a_{21})}{a_{11} - a_{22} - a_{21} + a_{22}}$$

$$p^* = \frac{(b_{22} - b_{21})}{b_{11} - b_{22} - b_{21} + b_{22}}$$

Al reemplazar los valores de los pagos del juego, se obtiene

$$(p^*, q^*) = (-0.5, -0.5).$$

Resultan valores que por estar fuera del intervalo (0,1) no corresponden a una elección probabilística.

Para efectos de ilustración de este ejercicio se eligió el vector previo $(p, q) = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right)$. Retomando la notación de las estrategias puras ($C =$ confesar, $NC =$ no confesar), la matriz asociada a la mejor respuesta al vector previo contiene los siguientes pagos:

$$H_1(C, q) = -3\left(\frac{1}{2}\right) + 0\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$H_1(NC, q) = -6\left(\frac{1}{2}\right) - 1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2}$$

$$H_2(p, C) = -3\left(\frac{1}{2}\right) + 0\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$H_2(p, NC) = -6\left(\frac{1}{2}\right) - 1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2}$$

La matriz de pagos del juego inicial Γ^o se muestra en la figura 2.5.

		←			
		C	NC		
↑	$-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}$	C
	$-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}$	NC
		←			

Figura 2.5. Matriz de pagos para el juego Γ^o

El equilibrio de este juego es (C, C) , es decir que $(p, q) = (1, 1)$. En consecuencia, el proceso de rastreo se vuelve un asunto trivial, ya que cualquier combinación convexa sobre el intervalo $[0, 1]$ del parámetro t dará lugar a la misma solución de Γ^o y de Γ^1 . Esto es enteramente comprensible, dado que la intención del proceso de rastreo es la selección de un equilibrio entre aquellos conocidos teóricamente de antemano. Y como el juego de los prisioneros posee un solo equilibrio, éste persistirá desde el punto de partida, con $t = 0$.

Los patrones de flechas corroboran el resultado, dado que las cabezas de flechas coinciden precisamente en la casilla cuyos pagos responden a la combinación de estrategias (C, C) .

Volviendo al cálculo que da lugar a los pagos de la figura 3.5, dado que $-3 > -6$ y $0 > -1$, forzosamente se cumple que $-3p + 0(1-p) > -6p - (1-p)$ para cualesquiera valores positivos de p y $(1-p)$; análogamente, $-3q + 0(1-q) > -6q - (1-q)$ para cualesquiera valores positivos de q y $(1-q)$. Únicamente para un subconjunto de valores negativos de p y q pueden revertirse las desigualdades. El conjunto de equilibrios sobre el gráfico X se representa en el gráfico 2.2.

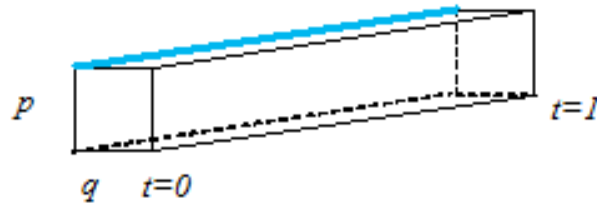


Gráfico 2.2. Rastreo lineal para el juego de los prisioneros

La senda de rastreo obtenida corresponde a la arista superior izquierda del gráfico, indicando con ello que tanto el equilibrio como la senda son únicos.

2.4.2. El juego de las monedas (Matching pennies)

En su planteamiento, los dos jugadores hacen una apuesta por el valor de una unidad monetaria. Cada jugador tiene una moneda y la lanza. Si las dos monedas caen en cara (C) o las dos caen en sello (S), el jugador columna pierde la apuesta y le entrega la unidad monetaria al jugador fila. Si las dos monedas caen de distinto modo, es el jugador fila el que pierde la apuesta, realizándose el traspaso de la unidad monetaria en sentido contrario.

En este juego no existe equilibrio en estrategias puras, ya que como se observa en el gráfico 2.7, no hay dos flechas de mejor respuesta cuyas cabezas coincidan.

		C	S	
p	1, -1	-1, 1		C
1-p	-1, 1	1, -1		S
	q	1-q		

Figura 2.6. Matriz de pagos y patrón de flechas en el juego de las monedas

Los pagos esperados para los jugadores fila (subíndice 1) y columna (subíndice 2), es decir los valores de utilidad obtenidos ante la elección de la estrategia de la contraparte, son

$$H_1(C) = q - (1 - q) = 2q - 1$$

$$H_1(S) = -q + (1 - q) = 1 - 2q$$

$$H_2(C) = p - (1 - p) = 2p - 1$$

$$H_2(S) = -p + (1 - p) = 1 - 2p$$

Cada jugador opta por una estrategia mixta. El jugador 1 (fila) esperará que el jugador 2 (columna) asigne probabilidades q y $(1 - q)$ tales que

$$2q - 1 = 1 - 2q$$

$$q = \frac{1}{2}$$

Mediante un procedimiento análogo, el jugador 2 esperará que el jugador 1 asigne probabilidades p y $(1 - p)$ tales que

$$2p - 1 = 1 - 2p$$

$$p = \frac{1}{2}$$

El equilibrio en estrategias mixtas es entonces

$$(p^*, q^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Para ilustrar el desarrollo del procedimiento de rastreo se eligió el vector de creencias previas $(p, q) = \left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right)$. El juego auxiliar Γ^0 resultará de las combinaciones mixtas siguientes:

$$H_1(C, q) = 1\left(\frac{1}{4}\right) - 1\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$H_1(S, q) = -1\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$H_2(p, C) = -1\left(\frac{2}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$H_2(p, S) = 1\left(\frac{2}{3}\right) - 1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

De aquí surge la matriz de pagos del juego Γ^0 :

	$\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ C S	
\downarrow C	$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$
S \downarrow	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$
	$\xrightarrow{\hspace{2cm}}$	

Figura 2.7. Matriz de pagos Γ^0 en el juego de las monedas.

El juego Γ^0 tiene un equilibrio en estrategias puras en (S, S) . Por tanto, sobre el gráfico X el primer equilibrio se sitúa en la combinación de estrategias $(0, 0)$, correspondiente al extremo inferior derecho del espacio de estrategia. A partir de allí, el desarrollo del procedimiento es como se muestra en el gráfico 2.3, cuya construcción se expone enseguida.

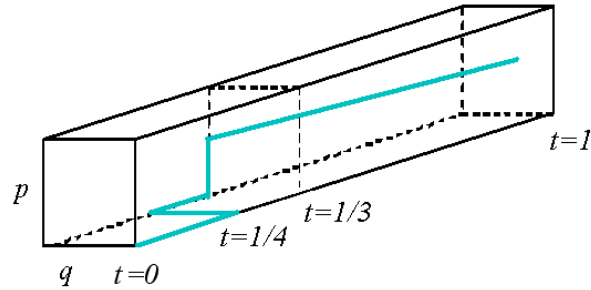


Gráfico 2.3. Rastreo lineal para el juego de las monedas.

Mediante combinaciones convexas de Γ^0 y Γ^1 se obtiene la matriz de pagos para cualquier juego auxiliar Γ^t cuyos pagos corresponden a las expresiones

$$1(t) + (1-t)\left(-\frac{1}{2}\right) = t - \frac{1}{2} + \frac{t}{2} = \frac{3t-1}{2}$$

$$-1(t) + (1-t)\left(-\frac{1}{3}\right) = -t - \frac{1}{3} + \frac{t}{3} = \frac{-2t-1}{3}$$

$$-1(t) + (1-t)\left(-\frac{1}{2}\right) = -t - \frac{1}{2} + \frac{t}{2} = \frac{-t-1}{2}$$

$$1(t) + (1-t)\frac{1}{3} = t + \frac{1}{3} + \frac{t}{3} = \frac{2t+1}{3}$$

$$-1(t) + (1-t)\left(\frac{1}{2}\right) = -t + \frac{1}{2} - \frac{t}{2} = \frac{-3t+1}{2}$$

$$1(t) + (1-t)\left(-\frac{1}{3}\right) = t - \frac{1}{3} + \frac{t}{3} = \frac{4t-1}{3}$$

$$1(t) + (1-t)\left(\frac{1}{2}\right) = t + \frac{1}{2} - \frac{t}{2} = \frac{t+1}{2}$$

$$-1(t) + (1-t)\left(\frac{1}{3}\right) = -t + \frac{1}{3} - \frac{t}{3} = \frac{-4t+1}{3}$$

El diseño resultante de la matriz se muestra en la figura 2.8.

		C	S	
p		$\frac{3t-1}{2}, \frac{-2t-1}{3}$	$\frac{-t-1}{2}, \frac{2t+1}{3}$	C
1-p		$\frac{-3t+1}{2}, \frac{4t-1}{3}$	$\frac{t+1}{2}, \frac{-4t+1}{3}$	S
		q	1-q	

Figura 2.8. Juego auxiliar Γ^t en el juego de las monedas

En los patrones de flechas se presentan dos cambios de dirección entre Γ^0 y Γ^1 , uno en la flecha izquierda y otro en la flecha inferior. La primera cambiará de sentido cuando

$$\frac{3t-1}{2} = \frac{-3t+1}{2}$$

de donde $t = \frac{1}{3}$.

La flecha inferior cambia de sentido cuando

$$\frac{4t-1}{3} = \frac{-4t+1}{3}$$

de donde $t = \frac{1}{4}$.

Los patrones de flechas en el curso del rastreo aparecen representados en la figura 2.9.

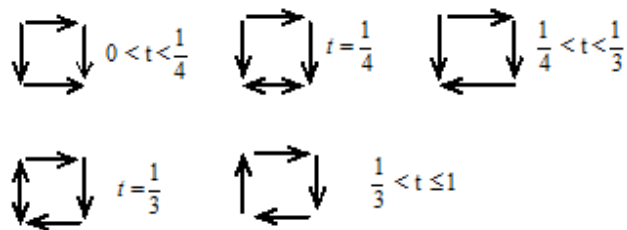


Figura 2.9. Patrones de flechas para el juego de las monedas

El cambio en los patrones de flechas altera la senda de rastreo, que corresponde a la línea de color claro en el gráfico 3.3. En $t = \frac{1}{4}$ surge un equilibrio de estrategias puras en (S, C) , y dado que (S, S) también es un equilibrio, todo el conjunto de combinaciones del segmento que los enlaza da lugar a equilibrios. En $t = \frac{1}{3}$ se genera un equilibrio en estrategias mixtas tal que, para el jugador fila, la igualación de los pagos esperados de sus estrategias puras implica que

$$\frac{3t-1}{2}(q) + \left(\frac{-t-1}{2}\right)(1-q) = \frac{-3t+1}{2}(q) + \left(\frac{t+1}{2}\right)(1-q)$$

de donde $q = \frac{t+1}{4t}$

Procediendo similarmente para el jugador columna,

$$\frac{-2t-1}{3}(p) + \frac{4t-1}{3}(1-p) = \frac{2t+1}{3}(p) + \frac{(-4t+1)}{3}(1-p)$$

de donde $p = \frac{4t-1}{6t}$

Aplicando el vector resultante a $t = \frac{1}{3}$ se obtiene

$$p = \frac{1}{6}, q = 1$$

En consecuencia, el segmento de combinaciones entre $(p, q) = (0, 1)$, correspondiente al equilibrio (S, C) , y $(p, q) = \left(\frac{1}{6}, 1\right)$, estará compuesto por equilibrios.

Solamente a partir de $t = \frac{1}{3}$ y hasta $t = 1$ existirá el equilibrio en estrategias mixtas.

Efectivamente, cuando $t = 1$, el vector de estrategia mixta muestra que $p = \frac{1}{2}$ y $q = \frac{1}{2}$, es decir el equilibrio conocido de antemano para $G = \Gamma^1$.

Por tanto existe un sólo rastreo, una senda única que comunica al equilibrio de Γ^0 , asociado al vector de creencias previas, con el equilibrio del juego original G .

2.4.3. La Batalla de los sexos

El problema planteado consiste en que una pareja de esposos expone sus preferencias sobre la mejor forma de disfrutar un tiempo libre. Las opciones disponibles son ir a fútbol (F) o ir al cine (C). Mientras que el hombre manifiesta que quiere ir al fútbol, la mujer señala que quiere ir al cine, pero al mismo tiempo los dos perciben que es mejor un plan en compañía que optar cada uno por su preferencia. La matriz de pagos aparece representada en la figura adjunta.

	F	C	
P	2, 1	0, 0	F
1-p	0, 0	1, 2	C
	q	1-q	

Figura 2.10. Matriz de pagos y patrón de flechas en el juego batalla de los sexos

A pesar de que el juego no tiene estrategias dominantes ni dominadas, sí tiene equilibrios de Nash en estrategias puras. En las combinaciones (F, F) y (C, C) cada uno de los jugadores aplica la estrategia que le reporta el mayor pago dada la estrategia de su contraparte.

Procediendo de modo similar a como se hizo en el juego de las monedas respecto a la igualación de pagos esperados, se llega además a un resultado de equilibrio en estrategias mixtas:

$$2q + 0*(1-q) = 0q + 1(1-q)$$

$$\text{de donde } q = \frac{1}{3}$$

$$0p + 2*(1-p) = 1p + 0(1-p)$$

$$\text{de donde } p = \frac{2}{3}$$

$$\text{En consecuencia, } p^*, q^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Para el ejercicio del rastreo se eligió como vector previo el par ordenado $(p, q) = \left(\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)\right)$. La réplica de los ejercicios anteriores tiene como primer paso la definición del juego generado por el enfoque ingenuo. Dadas las estrategias puras F y C , la matriz de resultados se construye a partir de los cálculos siguientes:

$$H_1(F, q) = 2\left(\frac{5}{6}\right) + 0\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{3} \text{ (pagos } a_{11} \text{ y } a_{12})$$

$$H_1(C, q) = 0\left(\frac{5}{6}\right) + 1\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \text{ (pagos } a_{21} \text{ y } a_{22})$$

$$H_2(p, F) = 1\left(\frac{1}{5}\right) + 0\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5} \text{ (pagos } b_{11} \text{ y } b_{21})$$

$$H_2(p, C) = 0\left(\frac{1}{5}\right) + 2\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5} \text{ (pagos } b_{12} \text{ y } b_{22})$$

La figura 2.11 presenta la matriz del juego Γ^0 .

		F	C	
p		$\frac{5}{3}, \frac{1}{5}$	$\frac{5}{3}, \frac{8}{5}$	F
1-p		$\frac{1}{6}, \frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}, \frac{8}{5}$	C
		q	1-q	

Figura 2.11. Matriz Γ^0 en el juego batalla de los sexos

Como segundo paso se realiza la combinación convexa de pagos de los juegos Γ^0 (ponderados por $1-t$ y Γ^1 (ponderados por t) que da lugar a la siguiente matriz para los juegos intermedios Γ^t :

		F	C	
p		$\frac{t+5}{3}, \frac{4t+1}{5}$	$\frac{5-5t}{3}, \frac{8-8t}{5}$	F
1-p		$\frac{1-t}{6}, \frac{1-t}{5}$	$\frac{5t+1}{6}, \frac{2t+8}{5}$	C
		Q	1-q	

Figura 2.12. Matriz Γ^t en la batalla de los sexos

La comparación de los patrones de flechas en el juego inicial y en el juego final da a entender que se producen dos cambios de dirección, uno en la flecha derecha y otro en la flecha superior. La secuencia mostrada en la figura 2.13 se explica como sigue:

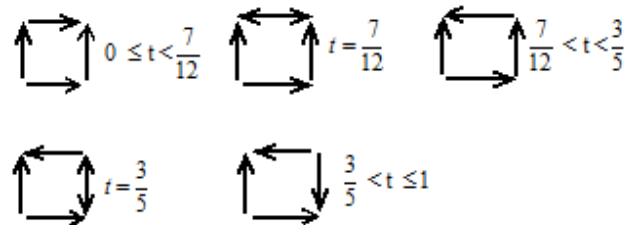


Figura 2.13. Patrones de flechas para el juego batalla de los sexos.

La flecha superior cambiará su dirección cuando

$$\frac{(4t+1)}{5} = \frac{(8-8t)}{5}; t = \frac{7}{12}$$

Y la flecha derecha cambiará de sentido cuando

$$\frac{(5-5t)}{3} = \frac{(5t+1)}{6}; t = \frac{3}{5}$$

Dado que $\frac{7}{12}$ es menor que $\frac{3}{5}$, el primer cambio se presenta en los pagos del jugador columna. El equilibrio se traslada de (F, C) a (F, F) . Luego, cuando $t = \frac{3}{5}$, se altera la relación entre los pagos del jugador fila dada la estrategia C del jugador columna. Es aquí donde debe buscarse el nacimiento de la estrategia mixta, dado que a partir del valor $\frac{3}{5}$ de t , comienzan a coexistir los equilibrios (F, F) y (C, C) . Al igualarse los pagos esperados de las estrategias puras para el jugador fila, se cumplirá que

$$\frac{t+5}{3}(q) + \left(\frac{5-5t}{3}\right)(1-q) = \frac{1-t}{6}(q) + \left(\frac{5t+1}{6}\right)(1-q)$$

$$\text{de donde } q = \frac{15t-9}{18t}$$

Análogamente, para el jugador columna,

$$\frac{4t+1}{5}(p) + \frac{1-t}{5}(1-p) = \frac{8-8t}{5}(p) + \frac{(2t+8)}{5}(1-p)$$

$$\text{de donde } p = \frac{3t+7}{15t}$$

Al reemplazar $t = \frac{3}{5}$, se obtiene el par ordenado $(p, q) = \left(\frac{44}{45}, 0\right)$.

Enlazando este punto del proceso con la solución en estrategias mixtas de Γ^1 resulta una trayectoria diferenciada totalmente del curso anterior del rastreo, como lo muestra el gráfico 2.4. Como cada uno de los equilibrios en estrategias puras se mantiene vigente

entre $t = \frac{3}{5}$ y $t = 1$, se concluye que la senda distinguible y que proporciona una selección es la que culmina en el equilibrio (F, F). Para el vector previo elegido, en consecuencia, la solución seleccionada es (fútbol, fútbol). En otros casos (otros vectores previos) el proceso podrá encaminarse hacia otro de los equilibrios del juego.

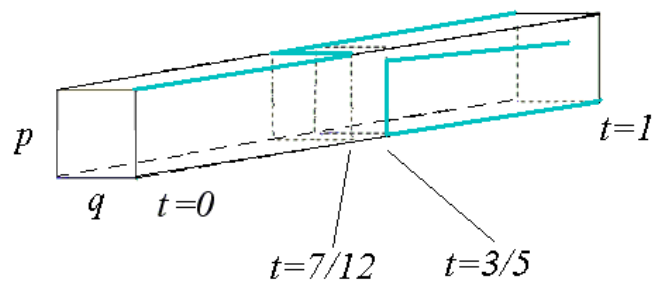


Gráfico 2.4. Rastreo lineal para el juego batalla de los sexos

3. El Equilibrio de respuesta cuantal

El equilibrio de respuesta cuantal (ERC) fue presentado por McKelvey y Palfrey (ver McKelvey y Palfrey 1995, 1996, 1998). El objetivo del procedimiento es utilizar los métodos estadísticos convencionales para hacer una elección con elementos estocásticos en el contexto de la teoría de juegos. Los jugadores eligen sus estrategias con base en la utilidad relativa esperada y asumen que los otros jugadores se comportan de la misma forma.

En la estructura de un modelo de respuesta cuantal hay perturbaciones que hacen parte de la función de utilidad y evolucionan temporalmente con una distribución independiente e idéntica, pero la distribución de probabilidades de esas perturbaciones se define en el campo de las creencias, no de las acciones realizadas realmente (Nyarko, 2001), y son éstas, las creencias en una jugada ex ante, y no la jugada ex post, las que constituyen el equilibrio de respuesta cuantal.

Los modelos de elección probabilística se fundamentan en las funciones de respuesta cuantal, en las que desviaciones de las decisiones óptimas se correlacionan negativamente con los costos asociados. En otras palabras, es posible que los individuos seleccionen sus mejores acciones⁹ a las peores, pero probablemente no tienen éxito para seleccionar en realidad la mejor de todas. La función de respuesta cuantal relaciona el vector de pagos esperados de elecciones disponibles para los individuos con un vector de elecciones probabilísticas que es monótono en sus pagos esperados.

Los modelos operan sobre la base de que si la estructura del error (el elemento estocástico inherente a las decisiones del individuo) se formula por medio de una función logit (ver sección 4.1), cuando el término de error tiende a cero, el ERC tiende a un subconjunto de equilibrios de Nash en un contexto de funciones de mejor respuesta probabilística, no determinística.

La idea de que los jugadores cometen errores infinitesimales en sus decisiones ha sido investigado, entre otros, por Van damme (1987), Rosenthal (1989) y Beja (1992). Como lo citan McKelvey y Palfrey (op. cit.), Rosenthal asume que la probabilidad de

⁹ Estrategias.

adoptar una estrategia particular es linealmente creciente en el pago esperado. Por el contrario, Beja encuentra que los jugadores intentan implementar una estrategia “objetivo” pero no tienen un éxito total al tratar de hacerlo, o no pueden hacerlo de manera perfecta. El-Gamal, McKelvey y Palfrey (1993), El-Gamal y Palfrey (1996), McKelvey y Palfrey (1992), Ma y Manove (1993), también han explorado las implicaciones que tienen para la toma de decisiones el hecho de que los jugadores en sus decisiones muestren una proclividad a cometer errores.

Este enfoque alternativo¹⁰ no abandona la noción de equilibrio, pero el concepto de equilibrio con expectativas perfectamente racionales implícito en el equilibrio de Nash se reemplaza por una noción de equilibrio de expectativas racionales imperfectas o “con ruido”. Esta restricción impuesta por McKelvey y Palfrey (op. cit) se basa en el supuesto de que los jugadores estiman sus pagos esperados de forma imparcial. Es decir que una estimación por el jugador i sobre el pago esperado de la acción a_{ij} , es en promedio igual el pago esperado de la acción a_{ij} calculada desde la distribución de probabilidad de equilibrio de la elección de acciones de los otros jugadores, porque ellos adoptan las mejores respuestas estimadas. En promedio, tales expectativas son correctas.

Los modelos de ERC son una extensión de los modelos de elección estadística (o de respuesta cuantil, como se denominan) tradicionalmente aplicados a la biología, la farmacología y las ciencias sociales. El nombre ha sido tomado de la literatura estadística sobre los modelos cuantales de elección/respuesta, en los que las elecciones del individuo o sus respuestas son racionales, pero se basan en variables latentes que no son observadas por el analista.¹¹

Este enfoque proporciona una estructura estadística conveniente para hacer estimaciones con datos de campo (experimentales). Si la estructura del error se define de una forma particular (logit, por ejemplo), el ERC se calcula como una función de la varianza de los errores de estimación que hace el jugador. Los datos permiten obtener estimaciones de máxima verosimilitud o de la varianza del error, y en contraste con el enfoque tradicional del equilibrio de Nash, que presupone predicciones determinísticas fuertes, en este caso se harían solamente predicciones estadísticas.

¹⁰ Alternativo al de Harsanyi y Selten, presentado en la primera parte.

¹¹ En el caso del ERC el vector de pagos estimados del jugador.

Para McKelvey y Palfrey (op.cit.) las predicciones estadísticas del modelo de ERC dependen de la precisión con que los jugadores estimen los pagos esperados por adoptar diferentes acciones. En la medida en que surjan variables independientes observables que a priori se correlacionan con la precisión de las estimaciones, se pueden predecir los efectos de diferentes experimentos en los que varían sistemáticamente las variables independientes observables. Una de esas variables puede ser la experiencia, ya que cuando los jugadores adquieren experiencia practicando un juego particular y hacen observaciones repetidas sobre los pagos recibidos por la elección de diferentes acciones, se esperaría que hicieran estimaciones más precisas de los pagos esperados por utilizar diferentes estrategias. A este hecho se refieren estos autores como *aprendizaje*.¹²

El término aprendizaje, sin embargo, significa diferentes cosas para diferentes personas. El-Gamal asocia ese aprendizaje con “aprender haciendo”.¹³ Sin embargo McKelvey y Palfrey no modelan detalladamente los mecanismos del aprendizaje, como se hace en alguna literatura sobre juegos repetidos. Allí el aprendizaje se modela como una actualización bayesiana completa o como un proceso miope pero determinístico, como sucedería en un juego ficticio o en la dinámica de Cournot.

La notación adoptada por McKelvey y Palfrey (op. cit.) en su análisis es como sigue:

El conjunto de estrategias del jugador i es

$S_i = \{s_{i1}, \dots, s_{iJ_i}\}$, donde J_i es el número de estrategias puras del jugador i

La función de pagos de cada jugador es

$u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$, con $S = \prod_{i \in N} S_i$, siendo N el conjunto de los n jugadores.

Δ_i es el conjunto de mediciones de probabilidad sobre S_i .

¹² El equilibrio de respuesta cuantil, como lo muestra la literatura especializada, se relaciona con el aprendizaje y más concretamente con el aprendizaje social. Este tipo de aprendizaje describe cualquier situación en la que los agentes económicos aprenden al observar el comportamiento de los otros y el aprendizaje social en redes aplica esta idea a situaciones en las que los agentes observan a los otros agentes a los que ellos están conectados en la red social. Si los agentes pueden (o no) procesar la información disponible en la red es un problema empírico que puede ser abordado por el ERC. Diversos trabajos reportan investigación experimental de aprendizaje en redes, como en Gale y Kariv (2003), Choi y Gale (2007) quienes desarrollan el marco conceptual para interpretar los datos generados por los experimentos, pero en el marco propuesto por McKelvey y Palfrey (1995, 1998).

¹³ Learning by doing.

Los elementos componentes de Δ_i son del tipo p_i , todos no negativos y cuya suma es igual a uno. Mientras que cada jugador individual ejerce una medición p_i , sus contrapartes ejercen una medición p_{-i} , de manera que (s_{ij}, p_{-i}) es la estrategia en la cual el jugador i adopta una estrategia pura y los demás jugadores ejercen sus conjeturas mediante la asignación de probabilidades.

Un vector (p_1, \dots, p_n) corresponde a un equilibrio convencional de Nash si

$$\forall_{i \in N} \text{ y } \forall p'_i \in \Delta, u_i(p'_i, p_{-i}) \leq u_i(p).$$

El espacio de pagos posibles para las estrategias que cada jugador puede adoptar se denota por

$$X_i = \mathbb{R}^{J_i}, \text{ y a su vez } X = \prod_{i=1}^n X_i$$

Al definir la función $\bar{u} : \Delta \rightarrow X$ por $\bar{u}(p) = (\bar{u}_1(p), \dots, \bar{u}_n(p))$

$$\text{con } \bar{u}_{ij}(p) = \bar{u}_i(s_{ij}, p_{-i})$$

es posible entender el equilibrio de Nash de tipo cuantil como el resultante de utilizar funciones de utilidad que apuntan a descubrir el valor de $\bar{u}_{ij}(p)$ mediante una estimación $\hat{u}_{ij} = \bar{u}_{ij}(p) + \varepsilon_{ij}$, donde el último sumando es un término de error. El vector de errores del jugador i , $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{iJ_i})$ se distribuye de acuerdo con una distribución (de probabilidad) conjunta de una función de densidad $f_i(\varepsilon_i)$. Para cada ε_{ij} existe la distribución marginal de f_i , además el error esperado es nulo, es decir, $E(\varepsilon_i) = 0$.

3.1. La especificación logit

McKelvey y Palfrey (op. cit.) presentan un caso especial de funciones de respuesta cuantil, que tradicionalmente se han utilizado para analizar el comportamiento en la elección individual. (Luce 1959). Para algún $\lambda \geq 0$, la función de respuesta cuantil en su

especificación logit se define, para $x_i \in \mathbb{R}^J$ (el espacio de pagos posibles para las estrategias de un jugador) por

$$\sigma_{ij}(x_i) = \frac{e^{\lambda_{x_{ij}}}}{\sum_{k=1}^{J_i} e^{\lambda_{x_{ik}}}}$$

Si cada jugador utiliza una función logit de respuesta cuantil, el correspondiente ERC o equilibrio logit (π) requiere que para cada i, j ,

$$\pi_{ij} = \frac{e^{\lambda_{x_{ij}}}}{\sum_{k=1}^{J_i} e^{\lambda_{x_{ik}}}}$$

donde $x_{ij} = \bar{u}_{ij}(\pi)$.

Las funciones de respuesta σ utilizan en su formulación el parámetro λ , el cual está inversamente relacionado con el nivel de error. Dicho de otro modo, λ corresponde a una cuantificación de la calidad con que es estimada la utilidad en su versión determinística. Si $\lambda = 0$, ello significa que las acciones contienen el mayor grado posible de error, y si $\lambda = \infty$ las perturbaciones se han anulado, no hay grado de error.

3.2. Aplicaciones

3.2.1. Dilema del prisionero

Para el dilema del prisionero, la evolución de las correspondencias de mejor respuesta usando la especificación logit se presenta en el gráfico 4.1.

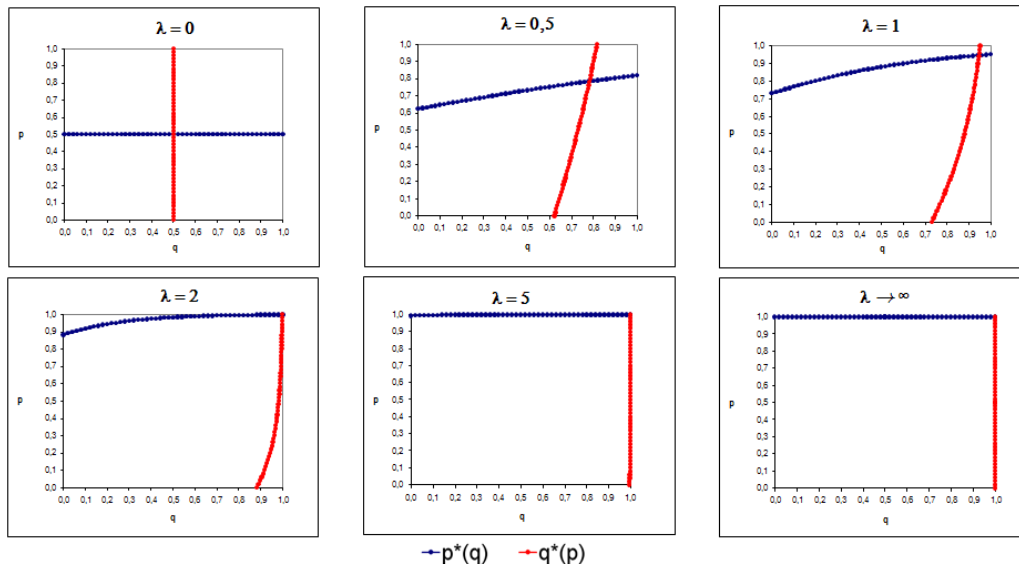


Gráfico 3.1. Mejores respuestas cuantales en el dilema del prisionero.

Los gráficos representan respectivamente las configuraciones de mejor respuesta cuantal asociadas a los valores $\lambda = 0, 0.5, 1, 2, 5$ y ∞ . Cabe resaltar el proceso acelerado de aproximación de los jugadores a un conocimiento más cierto de las características del juego. Primero, las gráficas muestran una tendencia a la curvatura, pero luego regresan a la estructura de líneas rectas luego de cruzar el umbral de $\lambda = 1$. Los puntos más distantes del equilibrio son los últimos en ajustarse. Debe destacarse también que la secuencia de equilibrios entre un estado de error y otro, fluctúa en un área relativamente pequeña dentro del espacio de estrategia, siempre dentro del cuadrante superior derecho delimitado por la configuración asociada a $\lambda = 0$.

El proceso sugiere, en líneas generales, que para los agentes la estructura de pagos es descifrable de una manera muy eficiente, en la medida que una reducida cantidad de información veraz sobre las características del juego facilita el ajuste del equilibrio hacia su versión determinística.

3.2.2. El juego de las monedas (Matching pennies)

La reformulación estocástica de los pagos esperados procede de la forma siguiente: si el jugador fila elige H con probabilidad p , el pago esperado será

$$Vp = (-1 + \varepsilon_{12})q + (1 - \varepsilon_{12})(1 - q) = 1 - 2q + \varepsilon_{12}$$

Si el jugador fila elige T con probabilidad $(1 - p)$, el pago esperado pasa a ser

$$Vp = (1 - \varepsilon_{11})q + (-1 + \varepsilon_{11})(1 - q) = 2q - 1 + \varepsilon_{11}$$

Si por su parte el jugador columna elige H con probabilidad q , el pago esperado es

$$Vq = (-1 + \varepsilon_{21})(1 - p) + q + (1 - \varepsilon_{21})(p) = 2p - 1 + \varepsilon_{21}$$

Y finalmente, si el jugador columna elige T con probabilidad $(1 - q)$ el pago esperado es

$$Vq = (1 + \varepsilon_{22})(1 - p) + (-1 + \varepsilon_{22})(p) = 1 - 2p + \varepsilon_{22}$$

El gráfico 4.2 señala las configuraciones de las funciones de respuesta cuantales para los mismos valores del parámetro λ de la sub-sección anterior, pero ahora en el contexto del juego de las monedas.

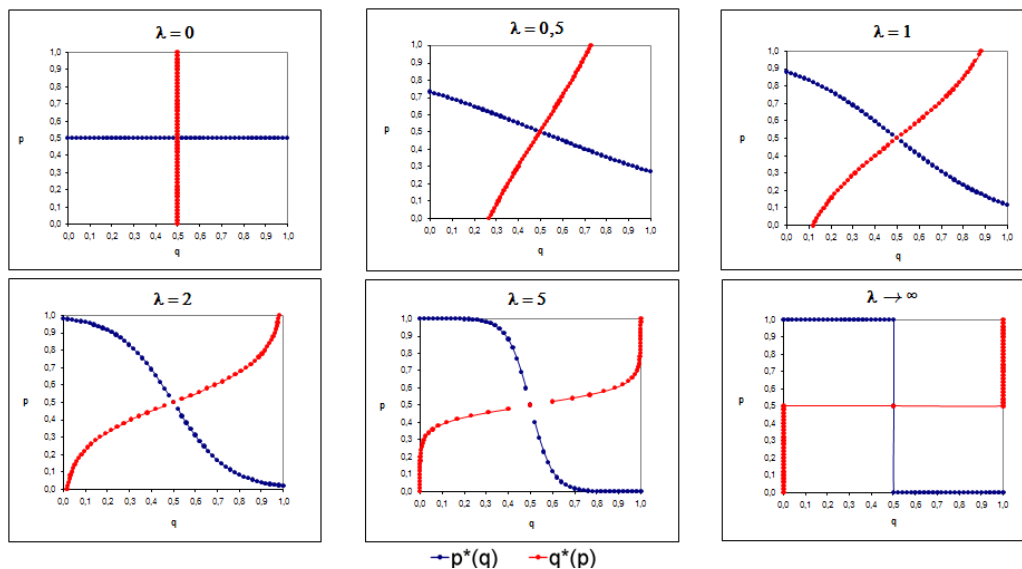


Gráfico 3.2. Mejores respuestas cuantales en el juego de las monedas.

En el primer recuadro del gráfico, con $\lambda = 0$ la incidencia del grado de error en las conjeturas de los jugadores es máxima, siendo las expresiones logit respectivamente

$$p(q) = \exp \frac{(1-2q)(0)}{\exp(1-2q)(0) + \exp(2q-1)(0)}$$

$$q(p) = \exp \frac{(1-2p)(0)}{\exp(1-2p)(0) + \exp(2p-1)(0)}$$

De donde $p, q = \frac{1}{2}$.

El recuadro presenta la situación totalmente contraria a la cruz de mejores respuestas determinísticas, de suerte que este es el resultado más alejado del que se obtendría con información perfecta.

Al sustituir el valor 0 por 0.5 comienza a surgir una figura rotada. En ella queda de manifiesto que en ambas curvas el conjunto de mejores respuestas empieza a crecer. Mientras que en el caso $\lambda = 0$ solo hay una única mejor respuesta, con $\lambda = 0.5$ surge un intervalo de imágenes del rango alrededor de 0.5, propiamente el intervalo (0.26894, 0.73106). Las distancias respecto a las líneas imaginarias $q = 0$, $q = 1$, $p = 1$, $p = 0$ son más estrechas.

Con $\lambda = 1$ la rotación y la curvatura de la figura se hacen más manifiestas, indicando una concentración leve de los puntos hacia los extremos de las cruces, es decir, hacia las mejores respuestas determinísticas. El intervalo de mejores respuestas es (0.01799, 0.98201), mayor que en el caso previo.

Los cuadros con los casos $\lambda = 2$ y $\lambda = 5$ muestran figuras con puntos de inflexión plenamente visibles, y el intervalo de mejores respuestas se aproxima al dominio de las funciones, es decir el intervalo (0,1).

En el límite, con $\lambda = \infty$ las curvas de reacción convergen a la forma de líneas rectas y las funciones pasan a convertirse en correspondencias. Tanto el dominio como

el conjunto de respuestas se hacen iguales al intervalo $(0,1)$ y las observaciones quedan comprimidas contra los valores 0 y 1 de p y de q . En este escenario de información perfecta, las conjeturas de mejor respuesta hechas por los jugadores anulan totalmente los errores.

Queda por resaltar que a lo largo de toda la evolución del parámetro, el equilibrio de respuesta cuantil siempre es $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Esto se debe a la simetría de las funciones derivada del hecho de que el monto de la apuesta siempre es el mismo (una unidad monetaria) en todas las combinaciones posibles de pagos del juego.

3.2.3. La batalla de los sexos

Al replicar las expresiones de los pagos estocásticos de la sub-sección anterior para este juego de coordinación, se obtienen las siguientes expresiones:

Si el jugador fila elige la estrategia C (con probabilidad p),

$$Vp = (2 + \varepsilon_{11})q + (0 + \varepsilon_{11})(1 - q) = 2q + \varepsilon_{11}$$

Si el jugador fila elige F (con probabilidad $1-p$),

$$Vp = (0 + \varepsilon_{12})q + (1 + \varepsilon_{12})(1 - q) = 1 + \varepsilon_{11}$$

Si el jugador columna elige C (con probabilidad q),

$$Vq = (1 + \varepsilon_{21})p + (0 + \varepsilon_{21})(1 - p) = p + \varepsilon_{21}$$

Y si el jugador columna elige F (con probabilidad $1-q$),

$$Vq = (0 + \varepsilon_{22})p + (2 + \varepsilon_{22})(1 - p) = 2 - 2p + \varepsilon_{22}$$

Como se sabe, el desarrollo del juego en su versión convencional da lugar a curvas de mejor respuesta que delimitan dos áreas rectangulares dentro del espacio de estrategias. Hacia este patrón deberán tender las funciones estocásticas en la medida que se incremente el valor del parámetro λ de la especificación funcional logit. La

imagen de las funciones de respuesta cuantales para los valores 0, 0.5, 1, 2, 5 y ∞ del parámetro λ se muestran en el gráfico 4.3.

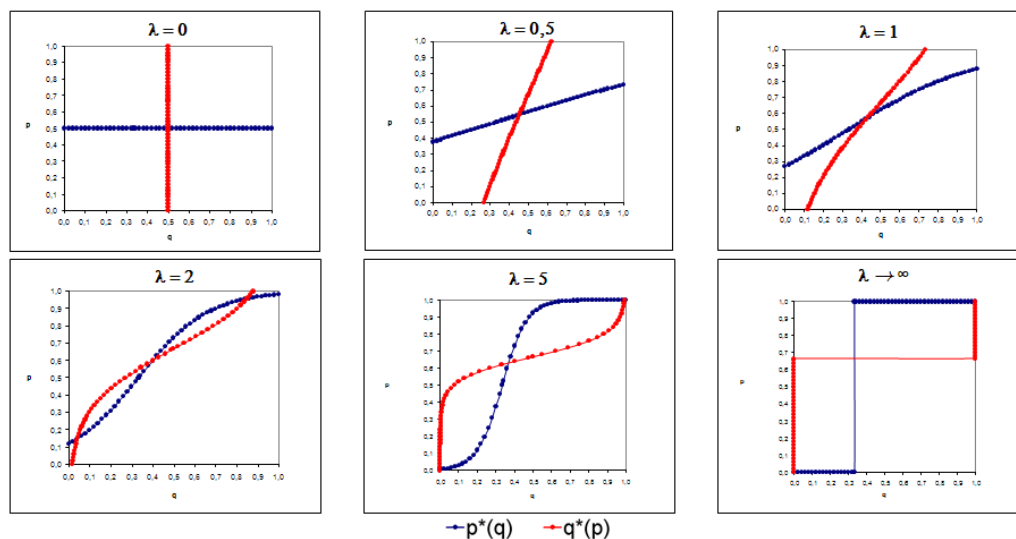


Gráfico 3.3. Mejores respuestas cuantales en la batalla de los sexos.

El punto de partida, $\lambda = 0$, resulta ser el mismo del caso del juego de las monedas, tal como lo muestra la figura. Dado que las expresiones exponenciales siempre serán iguales a uno, independientemente del múltiplo de λ , la figura de cruz con equilibrio en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ representa la máxima dispersión estocástica respecto de cualquier juego con uno o más equilibrios de estrategias mixtas.

Cuando $\lambda = 0.5$ la gráfica muestra tanto similitudes como diferencias respecto al juego de las monedas (matching pennies). Similitud porque los conjuntos de respuesta en ambas funciones empiezan a crecer. Diferencia porque $p^*(q)$ adquiere una pendiente positiva en contraposición al juego de las monedas y también porque el equilibrio comienza a desplazarse levemente de $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ hacia la esquina superior izquierda del espacio de estrategia.

Con $\lambda = 1$ la figura revela un cambio muy leve en las funciones de reacción. Los conjuntos de mejor respuesta se amplían de una manera no simétrica respecto a una línea imaginaria de 45 grados, ya que los pagos esperados tampoco son simétricos. Hacia las esquinas superior derecha e inferior izquierda del espacio de estrategia se configura una curvatura. El signo positivo de ambas pendientes evidencia el hecho de que al elevar la probabilidad de una elección por parte de un jugador, ya sea cine o fútbol, el otro jugador tenderá a hacer esa misma elección, aunque con un nivel distinto de error medio en su percepción del pago.

Cuando $\lambda = 2$ la evolución del parámetro da lugar a cambios trascendentales. De una parte, las curvaturas se acentúan en ambos extremos de las mejores respuestas. Y de otra, queda de manifiesto que para algún valor de λ en el intervalo (1,2) surgen dos nuevos equilibrios, ambos de estrategia mixta. Para llegar al resultado mostrado con $\lambda = 2$, es necesario que haya existido previamente algún punto de tangencia entre las dos curvas, y que paralelamente se comporte como un punto de inflexión (cambio en la segunda derivada). A partir de ese valor intermedio de λ las concavidades contrarias y reforzadas permiten la existencia de nuevos puntos de intersección, que como se ve, comienzan siendo elecciones de estrategias mixtas. Pero esto conlleva a una afirmación aún más importante: en aquel punto de tangencia, ¡realmente están contenidos los tres equilibrios! Dicho de otro modo, hay un valor de equilibrio "primario", resultante del hecho de que las pendientes son distintas. Y hay dos equilibrios asociados al hecho de que los puntos de las curvas cuyas segundas derivadas convergen hasta cero se acercan entre sí, para luego cruzarse y comenzar a distanciarse.

A la vez que existe siempre (para todo valor de λ) un equilibrio básico en las decisiones, en la medida que las curvas se acercan, el grado de sintonía en un inicio se incrementa, dado que no se percibe muy bien la falta de simetría en los pagos dictada por las preferencias de cada jugador hacia su actividad favorita, hasta llegar a un punto en que la sintonía es plena, porque las magnitudes de la reacción (las pendientes) se igualan. Pero a partir de ese punto, el conocimiento de los pagos involucrados conlleva hacia unas nuevas pautas de elección en las cuales adquiere mayor relevancia la preferencia propia de cada jugador, y surgen así equilibrios no simétricos, en los cuales uno de los jugadores no obtiene su mayor pago posible a pesar de guiarse por el principio de la mejor respuesta.

El caso de $\lambda = 5$ refleja las mismas características cualitativas del caso anterior, sólo que más reforzadas. Es decir, el equilibrio básico (inicial) se acerca más hacia el

punto límite $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ y los equilibrios "secundarios" se aproximan más a las esquinas, pero manteniendo aún su carácter de elecciones mixtas. De la observación de todos los gráficos hasta aquí se descubre que las figuras sí incorporan una simetría, pero no del mismo tipo que la del juego de las monedas. Mientras que en el juego de las monedas las curvas de reacción son simétricas tanto respecto de cualquier diagonal como respecto de las rectas $p = \frac{1}{2}$ y $q = \frac{1}{2}$, en la batalla de los sexos las respuestas cuantales solamente son simétricas respecto de una línea imaginaria de 45 grados que enlaza la esquina superior izquierda del espacio de estrategias con la esquina inferior derecha. Sobre esta línea se ubicará siempre la intersección básica de las mejores respuestas, de tal manera que los valores de $1 - p^*$ son iguales a los de q^* .

Finalmente, con $\lambda \rightarrow \infty$ la concentración de puntos sobre las elecciones extremas (estrategias puras) concluye el proceso con un escenario en el cual la intersección básica de las curvas corresponde al equilibrio de estrategias mixtas $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

4. El análisis de estabilidad

Los dos procedimientos examinados para el análisis de juegos, el PLR y el ERC, tienen, como fue visto, una representación gráfica de secuencias de equilibrios. En ambos casos es posible adaptar herramientas de aproximación dinámica que permiten conceptualizar acerca de la transición entre equilibrios, tomando como base la variable de referencia para el ajuste, la cual, de acuerdo al contexto específico de un juego será interpretada como “tiempo”, “aprendizaje” o “grado de error”. Propiamente, en el Procedimiento Lineal de Rastreo la variable t enseña el grado de retroalimentación de la información de segundo orden en respuesta al vector previo, mientras que en las funciones de respuesta cuantales el parámetro λ muestra la atenuación de las perturbaciones en los pagos percibidos por los jugadores.

4.1. La dinámica del Procedimiento Lineal de Rastreo

En la sección 3 se mostró que las correspondencias determinísticas de mejor respuesta, que equivalen al caso límite de las correspondencias cuantales, son en su representación gráfica figuras conformadas por segmentos rectos y superpuestos o perpendiculares a los ejes coordenados, de suerte que las pendientes $p(q)$ y $q(p)$ son o bien nulas o bien infinitas. Esto impide una evaluación dinámica de tipo tradicional, bajo la forma de sistemas en dos variables, aplicada a la secuencia de juegos resultantes de una inspección por rastreo lineal.

No obstante, Harsanyi y Selten emplean herramientas analíticas frente a las cuales pueden evaluarse las trayectorias del PLR hacia la solución de equilibrio de un juego. Los autores hacen mención de los conceptos conjunto de estabilidad, diagrama de estabilidad y estrategias y puntos de desestabilización. Los dos primeros se encuentran vinculados a la estructura de mejor respuesta de un juego, mientras que los dos últimos atañen específicamente al desarrollo del PLR.

Siguiendo la notación de la sección 2.1, se denomina conjunto de estabilidad de la estrategia pura ϕ_i al conjunto de las estrategias (en el caso de dos jugadores) o combinaciones de las mismas (en el caso de más de dos jugadores) q_{-i} tales que ϕ_i es una mejor respuesta a q_{-i} .

Para un juego 2×2 en particular, es posible conocer la pérdida en que incurre un jugador al desviarse de un equilibrio si el otro jugador conserva su propia estrategia. Siguiendo

la notación adoptada en la figura 2.3, estas pérdidas corresponden a las diferencias entre dos pagos a_{ij} o b_{ij} dependiendo de si es el jugador fila o el jugador columna es el que se separa del equilibrio.

Harsanyi y Selten muestran que al evaluar los pagos esperados o mixtos derivados de optar por una estrategia pura dada, las probabilidades (p^*, q^*) que dan lugar a equilibrios en estrategias mixtas (si los hay) pueden representarse en función de las pérdidas ya indicadas. El gráfico coordinado en el que tales probabilidades definen regiones de influencia de los distintos equilibrios del juego se denomina diagrama de estabilidad.

Estas regiones (de estabilidad) a su vez pueden definirse como las porciones del espacio de estrategia tales que la mejor respuesta a cualquiera de sus elementos (elecciones probabilísticas de estrategias) es un equilibrio dado del juego, bien sea en estrategias puras o mixtas. De esta definición surge como corolario que por cada equilibrio de un juego existe una región de estabilidad.

Mediante este andamiaje teórico, se concibe entonces a la estabilidad como la capacidad de atracción sobre las distintas combinaciones de estrategias posibles de los jugadores. O también es acertado indicar que un equilibrio es más estable en cuanto su región de estabilidad asociada ocupa una porción mayor del espacio de estrategia.

Sobre los diagramas de estabilidad es posible representar entonces los equilibrios auxiliares de las sendas de rastreo en cada juego, distinguiendo las estrategias y combinaciones de probabilidad en las que, de acuerdo con las figuras de la parte 2, se presentan cambios en los patrones de flechas, es decir virajes en la elección de estrategias. Las estrategias y probabilidades combinadas son denominadas respectivamente estrategias y puntos de desestabilización. En lo que sigue de esta sección, cada uno de los juegos seleccionados se analiza desde esta perspectiva.

En el primer caso, del dilema del prisionero, al aplicar a un vector previo cualquiera (p_0, q_0) el mismo procedimiento de cálculo efectuado para el vector de ejemplo

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de la sección 2.4.1, la matriz de pagos del juego Γ^0 será:

	C	NC
C	$-3q_0, -3p_0$	$-3q_0, -1-5p_0$
NC	$-1-5q_0, -3p_0$	$-1-5q_0, -1-5p_0$

Figura 4.1. Matriz genérica Γ^0 en el dilema del prisionero

Dado que para el intervalo $0 < q_0 < 1$ se cumple $-3q_0 > -1-5q_0$ y para el intervalo $0 < p_0 < 1$ se cumple $-3p_0 > -1-5p_0$, ante cualquier vector previo seleccionado y no solamente con la dupla $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ utilizada en la sección 2.4.1, el equilibrio inicial y el final se encuentran localizados en la combinación (C,C) = (confesar, confesar). Esto quiere decir que en el curso del rastreo se parte y se llega al mismo equilibrio único en estrategias puras, de modo que no se presentan modificaciones en los patrones de flechas utilizados como artificio gráfico en la descripción del procedimiento. Como no hay un equilibrio alterno que “compita” por generar zonas de atracción, la región de estabilidad es en consecuencia todo el espacio de estrategia en el recorrido completo del rastreo. Ello concuerda con la senda única de equilibrios demarcada en el prisma $X(G(p, q), t)$ del gráfico 2.2.

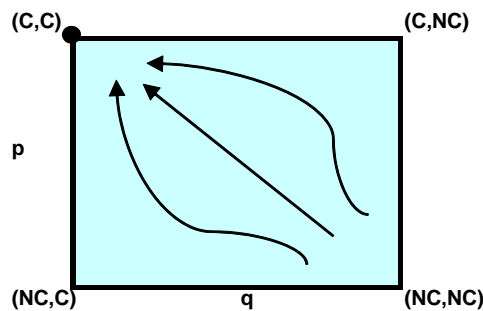


Figura 4.2. Diagrama de estabilidad del dilema del prisionero

La figura 4.2 muestra la vista frontal del prisma sobre el que opera el rastreo. Si el jugador fila modificara su estrategia pura respecto de la posición de equilibrio, y el jugador columna mantuviera la estrategia de confesar, la pérdida del primero, medida en

unidades de pago, sería de $a_{11} - a_{12} = -3 - (-6) = 3$. Lo mismo y en igual cuantía ocurriría si se invierten los papeles y se evaluara la diferencia $b_{11} - b_{12}$. Las condiciones para que el diagrama de estabilidad quede dividido en regiones donde cada estrategia pura sea la mejor respuesta de un conjunto no vacío, son

$$a_{11} - a_{21} > 0; b_{11} - b_{12} > 0; a_{22} - a_{12} > 0; b_{22} - b_{21} > 0.$$

Dado que $a_{22} - a_{12} = b_{22} - b_{21} = -1 < 0$, las condiciones no se cumplen en su totalidad, y sólo la estrategia de confesar opera como mejor respuesta para cada jugador. Por tal motivo, la condición de estabilidad de la combinación (C, C) es global, única y permanente.

De manera distinta, el segundo juego evaluado, matching pennies, presenta rasgos de especial complejidad que en la sección 2.4.2 fueron descritos a partir de los cambios en los patrones de flechas. De modo similar a lo mostrado en el juego de los prisioneros, en la figura 4.3 se muestra la cara frontal del prisma en las distintas etapas del PLR a partir

de la elección del vector previo $(p_0, q_0) = \left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right) \right)$. Como se recuerda, en las

posiciones $t = \frac{1}{4}$ y $t = \frac{1}{3}$ se presentan virajes en la elección de estrategias. Siguiendo las definiciones dadas al comienzo de la sección y el proceso de rastreo, se concluye que $t = \frac{1}{4}$ es el punto de desestabilización del jugador columna y C (cara) su estrategia

desestabilizante (dado que antes de $t = \frac{1}{4}$ regía la estrategia S, sello), mientras que $t = \frac{1}{3}$ es el punto de desestabilización del jugador fila y C su estrategia desestabilizante, pero ahora de manera incompleta, ya que el desplazamiento concluye en la posición $t = \frac{1}{6}$. Es

entendible entonces que frente al primer juego, este segundo escenario del juego de las monedas, presenta una configuración mucho menos estable, dado que hay un viraje completo para el jugador columna y un viraje parcial para el jugador fila.

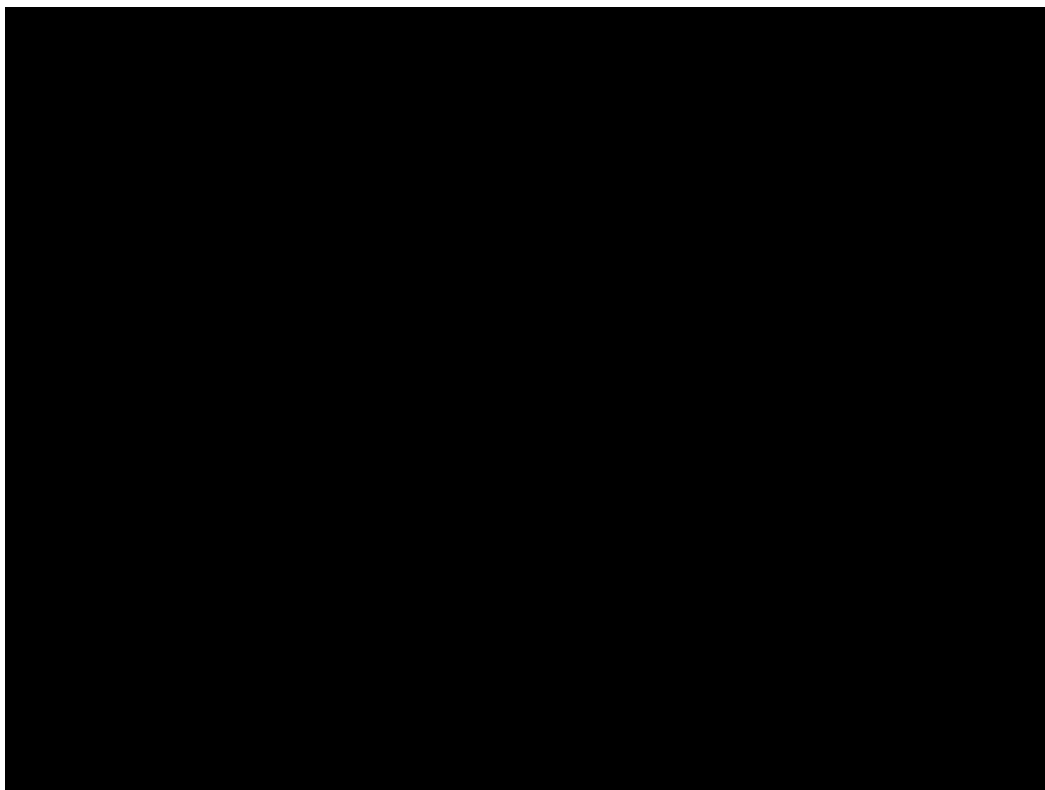


Figura 4.3. Diagrama de estabilidad y equilibrios de rastreo para el juego de las monedas.

Obsérvese que en la figura no aparece sombreado el diagrama, como en el dilema del prisionero. Esto responde a que ninguno de los equilibrios en estrategia pura de los juegos auxiliares mantuvo su condición de estabilidad y se verifica a la luz de las desigualdades señaladas por Harsanyi y Selten (op. cit.) para la localización de mejores respuestas. La comparación de pagos del juego original Γ^1 muestra que

$$a_{11} - a_{21} = a_{22} - a_{12} = 1 - (-1) = 2 > 0; b_{11} - b_{12} = b_{22} - b_{21} = -1 - 1 = -2 < 0.$$

Una vez más se presenta un caso de incumplimiento en las desigualdades impuestas como condición para que el diagrama defina regiones de estabilidad. Este resultado indica que si el jugador fila se desplazara de una estrategia pura hacia otra, dada la elección de su contraparte, obtendría una ganancia, y si el jugador columna ejecutase una acción análoga, obtendría una pérdida. Se verifica así la condición de juego de suma

ceros y se convalida la elección de un equilibrio en estrategias mixtas en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ al final del proceso.

La complejidad de la exposición se incrementa aún más en el tercero de los juegos, la batalla de los sexos, por que las trayectorias de rastreo se ramifican hacia los tres equilibrios del juego original, dos en estrategias puras y uno en estrategias mixtas. Recordando lo expuesto en la sección 2.4.3, a partir del vector previo $(p_0, q_0) = \left(\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)\right)$ se presentaron en el curso del rastreo virajes de estrategias en los puntos $t = \frac{7}{2}$ para el jugador columna y $t = \frac{3}{5}$ para el jugador fila. La figura 4.4 muestra, al igual que en los juegos anteriores, la cara frontal del prisma $X(G(p, q), t)$ junto con las regiones de estabilidad.

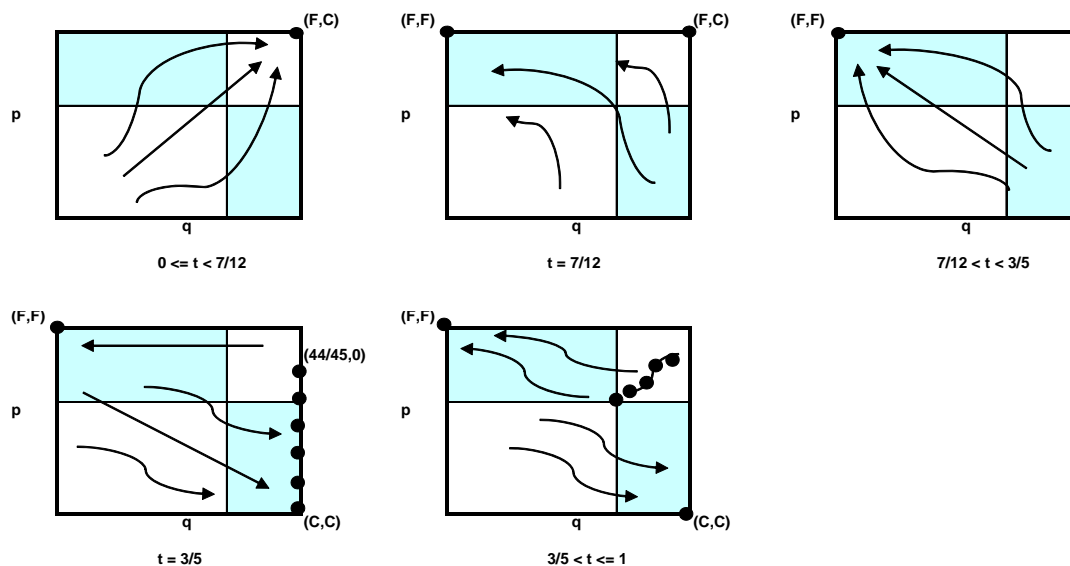


Figura 4.4. Diagrama de estabilidad y equilibrios de rastreo para el juego batalla de los sexos.

Como se aprecia, la estrategia desestabilizante F del jugador columna genera un viraje completo en $t = \frac{7}{12}$. Así mismo, la estrategia desestabilizante C del jugador fila genera un viraje completo en $t = \frac{3}{5}$, pero esta segunda alteración tiene dos rasgos: de una parte, no elimina por completo la preferencia por la estrategia F ; y de otra, vuelve a desestabilizar la elección del jugador columna, el cual fija una mejor respuesta también en la estrategia C . Esto último a su vez, vuelve a motivar un viraje en el jugador fila hasta la posición $p = \frac{44}{45}$ pero sin abandonar del todo la preferencia por C . Finalmente se presenta un curso conjunto de movimientos hasta la estrategia mixta $t = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Las diferencias saltan a la vista respecto de lo examinado en los juegos anteriores. A medida que se alcanza un nuevo equilibrio, éste se conserva como mejor respuesta ante determinadas elecciones de estrategia, y así mismo se delinea una especie de giro por los límites del diagrama, en el sentido opuesto de las manecillas del reloj, hasta converger luego sobre un punto intermedio del espacio de estrategias. Como los equilibrios previos en estrategias puras no desaparecen, terminan formándose regiones de estabilidad ligadas a las combinaciones (F, F) y (C, C) . Al retomar el análisis de desigualdades que involucra las pérdidas resultantes de desviarse de un equilibrio, se encuentra que

$$a_{11} - a_{21} = 2 > 0; a_{22} - a_{12} = 1 > 0; b_{11} - b_{12} = 1 > 0; b_{22} - b_{21} = 2 > 0.$$

Esto significa que ante una desviación de cualquiera de los equilibrios en estrategia pura, el jugador (cualquiera de los dos) que incurra en esta acción sufrirá una pérdida. Por tanto se ratifica que solamente mediante una renuncia mutua y coordinada a una combinación de mejores respuestas podría alcanzarse el compromiso representado por el equilibrio en estrategias mixtas, cuya debilidad se manifiesta en que él mismo contiene sus propios conjuntos de estabilidad (es decir, la mejor respuesta a $p = \frac{2}{3}$ es $q = \frac{1}{3}$ y viceversa) y ningún otro punto, de modo que la más mínima desviación conduciría a los jugadores hacia uno de los equilibrios en estrategias puras.

4.2. La dinámica del Equilibrio de Respuesta Cuantal

Mientras en el caso del PLR la representación de la dinámica del equilibrio se obtiene a partir de las estrategias y puntos de desestabilización, en el caso del ERC el ejercicio efectuado considera las correspondencias $p^*(q)$ y $q^*(p)$ mostradas en los gráficos 3.1, 3.2 y 3.3, aplicando una linealización o aproximación de Taylor directamente sobre la forma funcional logit que permite determinar las mejores respuestas para cada nivel del parámetro λ .

Como se recuerda, las expresiones logit incorporan los pagos esperados derivados de la elección de cada una de las estrategias puras disponibles para los jugadores. En el esquema general de un juego 2×2 donde A_1, A_2 son las estrategias del jugador fila y B_1, B_2 las estrategias del jugador columna, las mejores respuestas son respectivamente

$$p^*(q) = \frac{e^{H_1(A_1)\lambda}}{e^{H_1(A_1)\lambda} + e^{H_1(A_2)\lambda}}$$

$$q^*(p) = \frac{e^{H_2(B_1)\lambda}}{e^{H_2(B_1)\lambda} + e^{H_2(B_2)\lambda}}$$

Retomando los pagos esperados del primer juego analizado, el dilema del prisionero, se tienen como punto de partida las expresiones

$$p^*(q) = \frac{e^{-3q\lambda}}{e^{-3q\lambda} + e^{(-5q-1)\lambda}}$$

$$q^*(p) = \frac{e^{-3p\lambda}}{e^{-3p\lambda} + e^{(-5p-1)\lambda}}$$

A partir de la primera de éstas expresiones, y luego de la agrupación y simplificación algebraica, se obtiene por derivación

$$\frac{dp^*}{dq} = \frac{2\lambda e^{(-8q-1)\lambda}}{\left(e^{-3p\lambda} + e^{(-5p-1)\lambda}\right)^2}$$

Al aplicar tanto la función original como su derivada sobre la coordenada de equilibrio $q = 1$ se obtiene

$$p^*(1) = \frac{1}{1 - e^{-3\lambda}}, \quad \frac{dp^*}{dq}(1) = \frac{2\lambda e^{-3\lambda}}{(1 + e^{-3\lambda})^2}$$

Con esta información se construye la aproximación lineal de Taylor:

$$p = \frac{1}{1 - e^{-3\lambda}} + \frac{2\lambda e^{-3\lambda}}{(1 + e^{-3\lambda})^2}(q - 1)$$

La linealización reducida, es decir, la que suprime los términos independientes, resulta ser

$$0 = -p + \frac{2\lambda e^{-3\lambda}}{(1 + e^{-3\lambda})^2}$$

Procediendo de manera análoga, la linealización de q^* alrededor de $p = 1$ es

$$0 = \frac{2\lambda e^{-3\lambda}}{(1 + e^{-3\lambda})^2} - q$$

A partir de estos resultados se procede al cómputo de la matriz jacobiana, de su determinante y su traza:

$$J_E = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2\lambda e^{-3\lambda}}{(1+e^{-3\lambda})^2} \\ \frac{2\lambda e^{-3\lambda}}{(1+e^{-3\lambda})^2} & -1 \end{bmatrix}; \quad |J_E| = 1 - \frac{(2\lambda e^{-3\lambda})^2}{(1+e^{-3\lambda})^4}; \quad \text{tr}J_E = -2$$

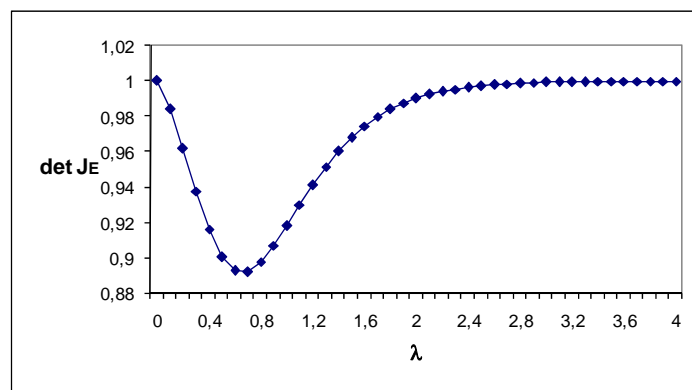


Gráfico 4.1. Determinante de J_E en el dilema del prisionero.

El gráfico 5.1 muestra que la expresión

$$1 - \frac{(2\lambda e^{-3\lambda})^2}{(1+e^{-3\lambda})^4}$$

fluctúa entre un mínimo de 0.892 ($\lambda = 0.7$) y un máximo de 1 ($\lambda = 0$). Por tanto, el determinante es siempre positivo y se cumple la condición $(\text{tr}J_E)^2 \geq 4|J_E|$. Ello conduce a que para cualquier valor de λ el equilibrio es un nodo estable.

Al proceder con el equilibrio cuantal para el juego de las monedas, se parte de las correspondencias de mejor respuesta

$$p^*(q) = \frac{e^{(2q-1)\lambda}}{e^{(2q-1)\lambda} + e^{(1-q)\lambda}}$$

$$q^*(p) = \frac{e^{(2q-1)\lambda}}{e^{(2q-1)\lambda} + e^{(1-q)\lambda}}$$

Replicando la derivación y agrupación de términos para obtener

$$\frac{dp^*}{dq} = \frac{4\lambda}{\left(e^{(2q-1)\lambda} + e^{(1-2q)\lambda}\right)^2}; \quad \frac{dq^*}{dp} = \frac{-4\lambda}{\left(e^{(1-2p)\lambda} + e^{(2p-1)\lambda}\right)^2}$$

Aplicando a la coordenada de equilibrio $q = \frac{1}{2}$ las expresiones $p^*(q)$ y $\frac{dp^*}{dq}$ resulta

$$p^* = \frac{1}{2}; \quad \frac{dp^*}{dq}\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda$$

La linealización efectuada genera la ecuación

$$p = \frac{1}{2} + \lambda\left(q - \frac{1}{2}\right)$$

de donde

$$0 = -p + \lambda q + \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)$$

Por su parte, al aplicar sobre la coordenada $p = \frac{1}{2}$ las expresiones $q^*(p)$ y $\frac{dq^*}{dp}$ se obtiene

$$p^* = \frac{1}{2}; \quad \frac{dp^*}{dq}\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda$$

La linealización correspondiente es

$$q = \frac{1}{2} - \lambda\left(p - \frac{1}{2}\right)$$

de donde

$$0 = -q - \lambda p + \left(\frac{\lambda + 1}{2} \right)$$

A partir de estos resultados es generada la matriz jacobiana

$$J_E = \begin{bmatrix} -1 & \lambda \\ -\lambda & -1 \end{bmatrix}; |J_E| = 1 + \lambda^2; \text{tr}J_E = -2$$

Considerando que los valores de λ están localizados en el intervalo $[0, \infty)$, el valor mínimo de $|J_E|$ es 1, y a partir de $\lambda=0$ el determinante comienza a aumentar ininterrumpidamente.

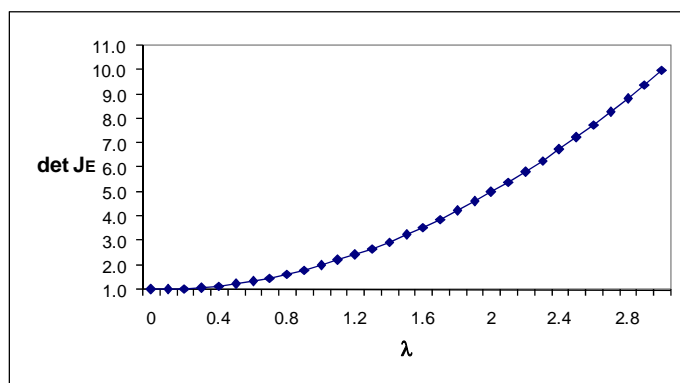


Gráfico 4.2. Determinante de J_E en el juego de las monedas.

A partir del momento en que el grado de error deja de ser máximo, es decir cuando λ entra a tomar valores positivos, se presenta una alteración en la configuración del equilibrio, de nodo estable a foco estable, tal como se muestra en la tabla adjunta. El valor negativo de la traza permite que se conserve la estabilidad del equilibrio del sistema.

Valor del parámetro de error	Condiciones del determinante y la traza	Tipo de equilibrio
$\lambda = 0$	$trJ_E < 0, J_E > 0, (trJ_E)^2 = 4 J_E $	Nodo estable
$\lambda > 0$	$trJ_E < 0, J_E > 0, (trJ_E)^2 < 4 J_E $	Foco estable

Tabla 4.1. Configuración de los equilibrios en el juego de las monedas

Finalmente se realiza la réplica del ejercicio para el juego de la batalla de los sexos, cuyas expresiones logit son

$$p^*(q) = \frac{e^{2q\lambda}}{e^{2q\lambda} + e^{(1-q)\lambda}}$$

$$q^*(p) = \frac{e^{p\lambda}}{e^{p\lambda} + e^{(2-2p)\lambda}}$$

De las dos ecuaciones se obtiene, por diferenciación,

$$\frac{dp^*}{dq} = \frac{3\lambda e^{(q+1)\lambda}}{(e^{2q\lambda} + e^{(1-q)\lambda})^2}$$

$$\frac{dq^*}{dp} = \frac{3\lambda e^{(2-p)\lambda}}{(e^{p\lambda} + e^{(2-2p)\lambda})^2}$$

El juego requiere de tres linealizaciones, una por cada equilibrio. El primero de ellos, $(p^*, q^*) = (0, 0)$ corresponde a estrategias puras, y el desarrollo de la aproximación de Taylor para el mismo es

$$p^*(0) = \frac{1}{1+e^\lambda}; \quad \frac{dp^*}{dq}(0) = \frac{3\lambda e^\lambda}{(1+e^\lambda)^2}$$

$$p = p^*(0) + \frac{dp^*}{dq}(0)(q-0) = \frac{1+e^\lambda + 3\lambda e^\lambda q}{(1+e^\lambda)^2}$$

$$0 = -p + \frac{3\lambda e^\lambda q}{(1+e^\lambda)^2} + \frac{1+e^\lambda}{(1+e^\lambda)^2}$$

$$q^*(0) = \frac{1}{1+e^{2\lambda}}; \quad \frac{dq^*}{dp}(0) = \frac{3\lambda e^{2\lambda}}{(1+e^{2\lambda})^2}$$

$$q = q^*(0) + \frac{dq^*}{dp}(0)(p-0) = \frac{1+e^{2\lambda} + 3\lambda e^{2\lambda} p}{(1+e^{2\lambda})^2}$$

$$0 = -q + \frac{3\lambda e^{2\lambda} p}{(1+e^{2\lambda})^2} + \frac{1+e^{2\lambda}}{(1+e^{2\lambda})^2}$$

Descartando los términos independientes para obtener el sistema reducido, resulta la matriz jacobiana

$$J_E = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3\lambda e^\lambda}{(1+e^\lambda)^2} \\ \frac{3\lambda e^{2\lambda}}{(1+e^{2\lambda})^2} & -1 \end{bmatrix}; \quad |J_E| = 1 - \frac{9\lambda^2 e^{3\lambda}}{[(1+e^\lambda)(1+e^{2\lambda})]^2}; \quad trJ_E = -2$$

El valor del determinante para distintos valores de λ aparece representado en el gráfico

4.5. Obsérvese que la expresión $1 - \frac{9\lambda^2 e^{3\lambda}}{[(1+e^\lambda)(1+e^{2\lambda})]^2}$ fluctúa entre un mínimo de

0.814 ($\lambda=1,0$) y un máximo de 1 ($\lambda=0$). En consecuencia, el determinante es siempre

positivo y se verifica la desigualdad $(trJ_E)^2 \geq 4|J_E|$. Por tanto, para todos los valores de λ el equilibrio corresponde a un nodo estable.

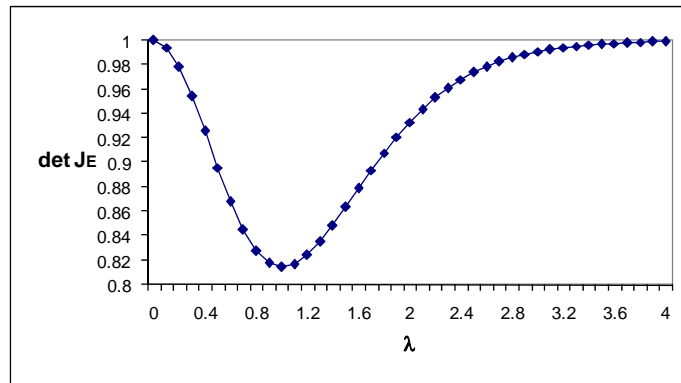


Gráfico 4.3. Determinante de J_E en el equilibrio $(0,0)$ de la batalla de los sexos.

La segunda linealización está referida al segundo equilibrio en estrategias puras, es decir que $(p^*, q^*) = (1,1)$. El desarrollo de la aproximación de Taylor es:¹⁴

$$p^*(1) = \frac{e^{2\lambda}}{e^{2\lambda} + 1}; \quad \frac{dp^*}{dq}(1) = \frac{3\lambda e^{2\lambda}}{(e^{2\lambda} + 1)^2}$$

$$p = \frac{e^{2\lambda}}{e^{2\lambda} + 1} + \frac{3\lambda e^{2\lambda}}{(e^{2\lambda} + 1)^2}(q - 1)$$

$$= \frac{e^{2\lambda}(e^{2\lambda} + 1 - 3\lambda) + 3\lambda e^{2\lambda} q}{(e^{2\lambda} + 1)^2}$$

De forma similar,

¹⁴ Una exposición detallada de estos procedimientos matemáticos se pueden consultar en Chang (1987), Takayama (1993) y Hoy, et. al. y Hoy (2001).

$$q^*(1) = \frac{e^\lambda}{(e^\lambda + 1)}; \quad \frac{dq^*}{dp}(1) = \frac{3\lambda e^\lambda}{(e^\lambda + 1)^2}$$

$$q = \frac{e^\lambda}{(e^\lambda + 1)} + \frac{3\lambda e^\lambda}{(e^\lambda + 1)^2}(p-1)$$

$$= \frac{e^\lambda(e^\lambda + 1 - 3\lambda) + 3\lambda e^\lambda p}{(e^\lambda + 1)^2}$$

El determinante asociado es entonces

$$J_E = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3\lambda e^{2\lambda}}{(e^{2\lambda} + 1)^2} \\ \frac{3\lambda e^\lambda}{(e^\lambda + 1)^2} & -1 \end{bmatrix}; \quad |J_E| = 1 - \frac{9\lambda^2 e^{3\lambda}}{[(1 + e^{2\lambda})(1 + e^\lambda)]^2}; \quad \text{tr}J_E = -2$$

Tanto el determinante como la traza coinciden con los valores obtenidos en la linealización sobre el equilibrio (0,0). Por ende, la configuración del equilibrio (1,1) también corresponde a un nodo estable.

Finalmente se examina el equilibrio en estrategias mixtas $(p^*, q^*) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. La linealización de la mejor respuesta del jugador fila es

$$p^*\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^{(2/3)\lambda}}{(e^{(2/3)\lambda} + e^{(2/3)\lambda})} = \frac{1}{2}; \quad \frac{dp^*}{dq}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3\lambda e^{(4/3)\lambda}}{(2e^{(2/3)\lambda})^2} = \frac{3\lambda}{4}.$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{3\lambda}{4}(q - 1/3) = \frac{2 - \lambda + 3\lambda q}{4}$$

El desarrollo correspondiente al jugador columna es

$$q^* \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{e^{(2/3)\lambda}}{\left(e^{(2/3)\lambda} + e^{(2/3)\lambda} \right)} = \frac{1}{2}; \quad \frac{dq^* \left(\frac{2}{3} \right)}{dp} = \frac{3\lambda e^{(4/3)\lambda}}{\left(2e^{(2/3)\lambda} \right)^2} = \frac{3\lambda}{4}$$

$$q = \frac{1}{2} + \frac{3\lambda}{4}(p - 2/3) = \frac{2 - 2\lambda + 3\lambda p}{4}$$

En consecuencia, la matriz jacobiana, el determinante y la traza son

$$J_E = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3\lambda}{4} \\ \frac{3\lambda}{4} & -1 \end{bmatrix}; \quad |J_E| = 1 - \frac{9\lambda^2}{16}; \quad trJ_E = -2$$

Distintos valores del determinante darán lugar a distintos patrones de equilibrio, como lo muestra la tabla siguiente.

Valor del parámetro de error	Condiciones del determinante y la traza	Tipo de equilibrio
$\lambda = 0$	$trJ_E < 0, J_E > 0, (trJ_E)^2 = 4 J_E $	Nodo estable
$0 < \lambda < 4/3$	$trJ_E < 0, J_E > 0, (trJ_E)^2 > 4 J_E $	Nodo estable
$\lambda = 4/3$	$trJ_E < 0, J_E = 0, (trJ_E)^2 > 4 J_E $	No es caracterizable el equilibrio
$\lambda > 4/3$	$trJ_E < 0, J_E < 0, (trJ_E)^2 > 4 J_E $	Punto de silla

Tabla 4.2. Configuración del equilibrio (2/3, 1/3) en el juego batalla de los sexos

La expresión del determinante comienza definiendo un sistema asociado a un nodo estable hasta que aquél toma valores negativos a partir de $\lambda = \frac{4}{3}$. Desde allí se transforma en un punto de silla, indicando con ello que las trayectorias de fase se aproximan al punto estacionario solamente a modo de ramas de hipérbola, lo cual es consecuente con la dificultad práctica que para los jugadores significarían los acuerdos

estratégicos hacia esta posición de equilibrio. El gráfico 5.4 muestra la senda del determinante.

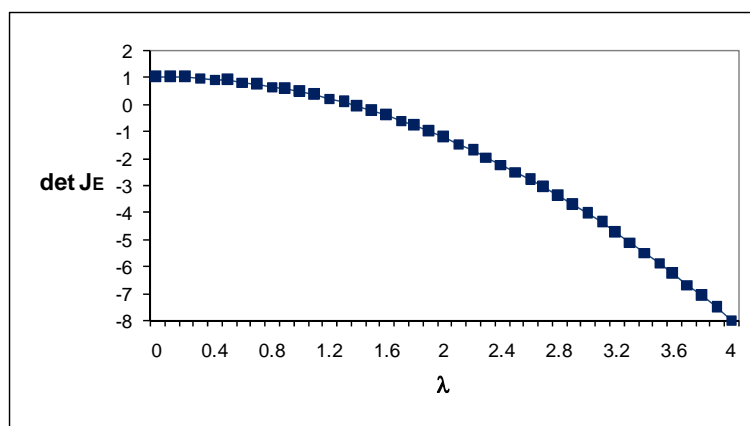


Gráfico 4.4. Determinante de J_E en el equilibrio $(2/3, 1/3)$ de la batalla de los sexos.

5. Conclusiones

La caracterización de los equilibrios en los dos procesos sometidos a examen aparece en la tabla adjunta.

Juego	PLR	ERC
Dilema del prisionero, equilibrio en (1, 1).	Región de estabilidad única y permanente	Nodo estable
Juego de las monedas, equilibrio en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	Región de estabilidad puntual con equilibrios intermedios inestables	De nodo estable a foco estable
Batalla de los sexos, equilibrio en (0, 0)	Dos regiones de estabilidad con equilibrios intermedios de estabilidad parcial	Nodo estable
Batalla de los sexos, equilibrio en (1, 1)		Nodo estable
Batalla de los sexos, equilibrio en $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$		De nodo estable a punto de silla

Tabla 5.1. Caracterización de equilibrios para el PLR y el ERC.

Para ofrecer una valoración cualitativa de los equilibrios en las columnas de la tabla que muestran los resultados del análisis de cada juego, es necesario efectuar una comparación a la luz del significado económico contenido en cada uno. El dilema del prisionero corresponde a una situación en la que los beneficios son alcanzables y no excluyentes, pero la configuración de incentivos unida al desconocimiento, para cada jugador, de las acciones de su contraparte, desde la posición inicial conduce a un resultado subóptimo en el sentido de Pareto. Un ejemplo de esta naturaleza puede ocurrir cuando un inversionista no toma en cuenta que otros agentes pueden estar invirtiendo en el mismo activo, de suerte que todos ven incumplida su expectativa de rentabilidad. Supóngase que luego de ello los inversionistas van probando otros tipos de activos, uno por uno, y dado que la percepción sobre éstos es compartida, la concurrencia se repite y el desfase de rentabilidad se mantiene. A pesar de que individualmente puede operar la lógica del beneficio, la ausencia de información del entorno, y específicamente de las pautas de acción de las contrapartes, genera trampas de incentivos asimilables al nodo estable del ERC.

En contraposición, el juego de las monedas está referido a una situación en la que el beneficio es indivisible (una unidad monetaria que no se fracciona) y excluyente en la configuración del juego original. En la medida que se comprende la naturaleza del esquema de pagos, las primeras predisposiciones de equilibrio pierden atractivo, como se indica en la configuración de estabilidad del equilibrio en el PLR. Ejemplos de esta orientación particular de incentivos pueden ser los casos de competencia de colectivos sociales por un bien público (como una obra de infraestructura). Cada colectivo propenderá por conocer las razones que su contraparte exponga para la adjudicación de la obra, pero procurará ocultar las motivaciones propias. La captura de información y la transmisión de señales erradas hacia el contrincante harían las veces de episodios de relativa afinidad o estabilidad en las elecciones, pero en último término el esquema tornará hacia la condición de juego de suma cero. Si bien la convergencia descrita por el ERC corrobora la adquisición y aprovechamiento del aprendizaje, la propia condición de juego de una lanzada, unida al equilibrio en estrategias mixtas, impide que los jugadores puedan optar con certidumbre por una sola de las estrategias puras disponibles.

Finalmente, en la batalla de los sexos se expresa la necesidad de concordancia en las preferencias, en un contexto en el que el beneficio que se procura sólo puede ser asignado asimétricamente. Piénsese por ejemplo en que distintas comunidades de un mismo territorio pudieran decidir el uso de sus tributos. Como por definición al asignar recursos públicos a un determinado fin se incurre en costos de oportunidad medibles en términos de los bienes que contribuyen a otros fines, habrá unos agentes más satisfechos que otros. Mientras que el análisis de las respuestas cuantales respalda el avance hacia una posición de tipo “filo de navaja”, por fuera del cual una preferencia arrastra a la otra, el resultado del PLR es afín a este patrón en la medida que muestra la fragilidad de la solución concertada.

En estos ejemplos y sus implicaciones para la acción colectiva, el resultado de la tabla puede verse como un argumento favorable a la coordinación (o comunicación), a la transparencia (provisión de información) y a la adquisición de aprendizaje. Si un agente antepone sus convicciones (plasmadas formalmente en el vector previo) y sus contrapartes actúan en igual sentido, la trayectoria de ajuste hacia posibles acuerdos es más accidentada y no posee la robustez que pudiera alcanzarse a partir de un entorno en el que no se pretende adivinar la naturaleza del juego, sino acomodarse al grado de

veracidad que se tiene del mismo. Si las partes adoptan así mismo un criterio de respuesta pasiva, se avanzaría con mayor coherencia hacia la solución del juego.

De este modo, un proceso social puede evolucionar satisfactoriamente si se reafirma la convicción acerca de sus beneficios, pero tomará un curso irregular y de menor estabilidad si uno o unos pocos agentes anteponen su concepto o versión acerca de los objetivos o resultados de la actividad emprendida. Al menos ese es el presupuesto teórico a la luz del esquema simplificado provisto por la teoría de juegos y su análisis a la luz de la matemática diferencial.

6. Referencias

Aumann R.J. (1988): A General Theory of Equilibrium Selection in Games. MIT Press. Introducción.

Beja, A. (1992), "*Imperfect Equilibrium,*". Games and Economic Behavior. 4, 18-36.

Choi, Syngjoo; Gale, Douglas; Kariv, Shachar (2007). "*Social Learning in Networks: A Quantal Response Equilibrium Analysis of Experimental Data.*"

El-Gamal, M.; McKelvey, R; Palfrey, T. (1993). "*Computational Issues in the Statistical Design and Analysis of Experimental Games*". International Journal of Supercomputer Applications", Vol. 7, No. 3, 189-200.

El-Gamal, M.; McKelvey, R; Palfrey, T. (1993). "*Economical Experiments: Bayesian Efficient Experimental Design*". International Journal of Supercomputer Applications. 25:495-517.

Elzen, A. H. van den (1990). "*Interpretation and Generalization of the Lemke Howson Algorithm*". Methods of Operations Research 60, 337-345.

Elzen A. H., van den y A. J. J. Talman. (1991). "*A Procedure for Finding Nash Equilibria in Bimatrix Games*" ZOR Methods and Models of Operations Research 35, 27-43.

Elzen A. H. van den y A. J. J. Talman (1994). "*Finding a Nash Equilibrium in Noncooperative N Person Games by Solving a Sequence of Linear Stationary Point Problems*" ZOR Mathematical Models of Operations Research 39, 27-43.

Elzen A. H. van den y A J J Talman (1995) "*An algorithmic approach towards the tracing procedure of Harsanyi and Selten*". CentER Discussion paper No. 95111, Tilburg University Tilburg.

Elzen, A. H. van den. (1996). "*Constructive application of the linear tracing procedure to polymatrix games*".

Fogale Alberto, Pellizzari Paolo y Warglien Massimo. (2006). Learning and equilibrium selection in a coordination game with heterogeneous agents. Working Paper No. 135/2006. University of Venice.

Gale, D. and S. Kariv (2003) "*Bayesian Learning in Social Networks.*" Games and Economic Behavior, 45(2), pp. 329-346.

- Gibbons, Robert (1992). *Un Primer Curso de Teoría de Juegos*. Antoni Bosch.
- Goeree, J.K. y C.A. Holt (2000) "*Ten Little Treasures of Game Theory and Ten Intuitive Contradictions*". University of Virginia.
- Goeree, J. K. (2008). "*Charles A. Holt, Thomas R. Palfrey. Quantal Response Equilibrium.*" En *New Palgrave Dictionary of Economics*, Second Edition, Editors Steven N. Durlauf and Lawrence E. Blume, Palgrave Macmillan.
- Goeree, J.K., C.A. Holt y T.R. Palfrey (2002) "*Quantal Response Equilibrium and Overbidding in Private-Value Auctions,*", *Journal of Economic Theory*, 104(1), 247-272.
- Goeree, J. K., C. A. Holt, y T. R. Palfrey (2003) "*Risk Averse Behavior in Asymmetric Matching Pennies Games,*" *Games and Economic Behavior*, 45, 97-113.
- Goeree, J.K. y C.A. Holt (2005) "*An Explanation of Anomalous Behavior in Models of Political Participation,*" *American Political Science Review*, 99(2), 201-213.
- Goeree, J. K., C. A. Holt, y T. R. Palfrey (2005) "*Regular Quantal Response Equilibrium,*" *Experimental Economics*, 8(4), 347-67.
- Chang, Alpha. (1987). *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. McGraw Hill, México.
- Harsanyi, J. C. (1975). "*The tracing procedure a Bayesian approach to defining a solution for n person noncooperative games*". *International Journal of Game Theory*. 4, 61-94.
- Harsanyi J. C. (1976). A solution concept for n person noncooperative games *International Journal of Game Theory*.
- Harsanyi, John, Reinhard, Selten. (1988). *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*. MIT Press.
- Herings, Jean Jaques. (2000). "*Two simple proofs of the feasibility of the linear tracing procedure.*" *Economic Theory*, 15, 485-490.
- Herings, Jean Jaques; Peeters, Roland (2001). "*Equilibrium Selection in Stochastic Games*". METEOR Working Paper No. RM/01/019.

Hillas, John; Kohlberg, Elon (2002). "Conceptual Foundations of Strategic Equilibrium", en R. Aumann y S. Hart (eds.), *Handbook of Game Theory*, Vol. 3, Chapter 42. New York, Elsevier.

Hoy, Michael; Livernois, John; McKenna, Chris; Rees, Ray; Stengod, Thanasis. (2001), *Mathematics for Economics*, Second Edition, MIT.

Kohlberg, Elon (1990). "*Refinements of Nash Equilibria: The Main Ideas*", en T. Ichiishi, A. Neyman, y Y. Tauman (eds.), *Game Theory and Applications*. San Diego: Academic Press.

Kreps, Davis; Wilson, Robert. (1982). "*Sequential Equilibria*," *Econometrica*, 50: 863-894.

Luce, Robert D. 1958. *Individual Choice Behavior*, New York: Wiley and Sons, New York.

Manove, Michael; Ma, Albert Ching-To (1993). "*Bargaining with deadlines and imperfect player control*". *Econometrica*, Vol. 16, No. 6, 1313-1339.

McKelvey, R. D. y T. R. Palfrey R. (1992) "*An experimental Study of the Centipede Game*," *Econometrica*, 60(4), 803-836.

McKelvey, R. D. y T. R. Palfrey R. (1995) "*Quantal Response Equilibrium for Normal Form Games*," *Games and Economic Behavior*, 10, 6-38.

McKelvey, R. D. y T. R. Palfrey (1996) "*A Statistical Theory of Equilibrium in Games*," *Japanese Economic Review*, 47(2), 186-209.

McKelvey, R. D. y T. R. Palfrey (1998) "*Quantal Response Equilibrium for Extensive Form Games*," *Experimental Economics*, 1(1), 9-41.

Nash, John (1950) "Equilibrium points in n-person games" *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36(1):48-49.

Nash, John (1951) "Non-Cooperative Games" *The Annals of Mathematics* 54(2):286-295.

Nyarko, Yaw. (2001) "*Learning, Quantal Response Equilibrium and Equilibrium in Beliefs*." Economic Research Report, New York University.

Osborne, Martin; Rubinstein, Ariel. (1994). *A Course in game Theory*, MIT Press.

- Pérez, Joaquín; Jimeno, Luis; Cerdá, Emilio (2004). Teoría de Juegos. Pearson.
- Takayama, Akira. (1993). Analytical Methods in Economics. Michigan.
- Vega, Fernando (2000). Economía y Juegos. Antoni Bosch.
- Rosenthal, Robert W. (1989). "*A Bounded-Rationality Approach to the Study of Noncooperative Games.*" International Journal of Game Theory, 18(3): 273---292.